Untersuchungen

zur

Variations-Rechnung.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN

ÖFFENTLICH ZU VERTEIDIGEN

am 6. October 1894

VON

Ernst Zermelo

aus Berlin.

OPPONENTEN:

Hr. Dr. phil. Wendt.
- Dr. phil. Schönrock.
- Dr. phil. Wreschner.

BERLIN.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke).

Linienstr. 158.

Dem Andenken meiner Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535723_0045

Die Grundlage der nachstehenden Untersuchungen bilden die Vorlesungen des Herrn Prof. Weierstrass über „Variations-Rechnung“, die, während einer Reihe von Jahren an der Berliner Universität gehalten, mir zuerst im Sommer 1892 durch einige Ausarbeitungen im Besitz des „Mathematischen Vereins“, zunächst aber durch eine Vorlesung des Herrn Prof. H. A. Schwarz ihrem wesentlichen Inhalte nach zur Kenntnis gekommen sind. Meine Arbeit wird von dem Bestreben geleitet, einen Teil der von Herrn Weierstrass neu entwickelten strengen Methoden, die sich auf Maxima und Minima von Integralen der einfachsten Form beziehen, zunächst ohne Berücksichtigung von Nebenbedingungen und in wesentlich theoretischem Interesse, auf den allgemeineren Fall auszudehnen, wo die Function unter dem Integralzeichen Ableitungen beliebig hoher Ordnung enthält. Diese Verallgemeinerung bezieht sich auf die Darstellung der Curven durch einen Parameter, auf die Durchführung einer strengen Definition des Maximums oder Minimums und auf die Anwendung der von Herrn Weierstrass eingeführten Function E zur Auffindung notwendiger und hinreichender Bedingungen, während die auch in jenen Vorlesungen untersuchte „zweite Variation“ hier grundsätzlich ausser Betracht geblieben ist. Dagegen ist die wertvolle Arbeit Ludwig Scheeffers „Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen“ (Math. Ann. XXV), die bei sehr ähnlicher Betrachtungsweise doch erhebliche Verschiedenheiten der Methode aufweist, hier ohne wesentlichen Einfluss gewesen.

Erster Abschnitt.

Über die Bedingungen, denen die Function unter dem Integralzeichen genügen muss.

Die Untersuchungen von Herrn Weierstrass beziehen sich auf Integrale der Form:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y;\ x', y')\, dt$$

$$\left(x' = \frac{dx}{dt},\quad y' = \frac{dy}{dt} \right),$$

wo $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ als die laufenden Coordinaten eines Curvenstückes aufgefasst werden können, über welches die Integration zu erstrecken ist.

Soll dieses Integral von der in gewisser Beziehung willkürlichen Art, wie die Coordinaten der Curve als Functionen des Parameters t dargestellt sind, unabhängig sein, so muss, wie gezeigt wird, F in Bezug auf seine beiden letzten Argumente x', y' homogen von erster Dimension sein, oder, was dasselbe sagt, der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} x' + \frac{\partial F}{\partial y'} y' = F,$$

woraus weitere Formeln entspringen.

Zur analogen Untersuchung des allgemeineren Falles:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, x', \ldots x^{(n)};\ y, y', \ldots y^{(n)})\, dt$$

haben wir zunächst nach den entsprechenden Bedingungsgleichungen für diese allgemeinere Function F zu fragen.

Zur Herleitung derselben werde ich mich, da hier die direkte Substitution eines anderen Parameters nicht mehr zweckmässig scheint, in ähnlicher Weise der Variationsrechnung selbst bedienen, wie man es seit Euler zur Aufstellung der gewöhnlichen „Integrabilitäts-Bedingungen“ zu thun pflegt. Doch wird diese Anwendung eine rein formale sein und keine anderen Principien als die Elemente der Differential-Rechnung zu Grunde legen.

$$F \equiv F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})$$

(in abgekürzter Schreibweise) werde als eine analytische Function ihrer sämtlichen Argumente vorausgesetzt, die in dem ganzen betrachteten Bereiche den Charakter einer ganzen Function, also auch partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt.

$$x = \varphi(\vartheta), \quad y = \psi(\vartheta)$$

seien eindeutige und mit ihren r ersten Ableitungen stetige Functionen von ϑ im Intervall

$$\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2,$$

wobei für den einen Teil der folgenden Betrachtungen die Annahme $r = n$, für den anderen erst $r = 2n$ genügt; ausserdem mögen $\varphi'(\vartheta)$ und $\psi'(\vartheta)$ an keiner Stelle des Intervalles gleichzeitig verschwinden.

Es wird dann der Punkt x, y ein zusammenhängendes Curvenstück 1 2 in einem Zuge und in bestimmtem Richtungssinn beschreiben, während ϑ immer wachsend das Intervall $\vartheta_1 \ldots \vartheta_2$ durchläuft; für eine beliebig gezeichnete rectificierbare Curve kann z. B. immer $\vartheta = s$ gesetzt, die Bogenlänge zur unabhängigen Variablen gewählt werden. Zu jedem Werte ϑ zwischen ϑ_1 und ϑ_2 gehört ein bestimmter Punkt $\varphi(\vartheta), \psi(\vartheta)$ des Curvenstückes und umgekehrt zu jedem dieser Punkte ein gewisses ϑ des Intervalles. — Wir können nun $\vartheta = \vartheta(t)$ als eine beliebige im Intervall mit ihren ersten r Ableitungen stetige und beständig wachsende Function von t, oder, was dasselbe ist, t als eine eben solche Function von ϑ annehmen und dann die Endwerte t_1, t_2 bestimmt denken durch $\vartheta(t_1) = \vartheta_1$, $\vartheta(t_2) = \vartheta_2$. Wenn dann t das Intervall $t_1 \ldots t_2$ zunehmend durchläuft, so muss auch ϑ immer wachsen von ϑ_1 bis ϑ_2 und das Curvenstück 1 2 erzeugen.

$\vartheta = t$ ergiebt die ursprüngliche Darstellung der Curve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

$\vartheta = \bar{\vartheta}(t)$ aber eine andere:

$$x = \varphi(\bar{\vartheta}) = \bar{\varphi}(t), \quad y = \psi(\bar{\vartheta}) = \bar{\psi}(t);$$

und von dieser Form müssen auch alle den gemachten Voraussetzungen entsprechenden Darstellungen $\bar{\varphi}(t)$, $\bar{\psi}(t)$ unseres Curvenstückes sein: immer giebt es eine solche Function $\vartheta = \bar{\vartheta}(t)$, welche die Überführung bewirkt.

Soll nun für ein beliebig vorgeschriebenes Curvenstück 1 2

$$x = \varphi(\vartheta), \quad y = \psi(\vartheta) \qquad (\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2)$$

unser Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x^{(\mu)}, \; y^{(\mu)}) dt \qquad \left(x^{(\mu)} = \frac{d^\mu x}{dt^\mu} \right)$$

einen bestimmten, von der besonderen Form der Darstellung unabhängigen Wert besitzen, so darf es nach Fixierung der Functionen φ, ψ nur von den Endwerten ϑ_1 und ϑ_2 der Function $\vartheta = \vartheta(t)$ abhängen, also bei constantem Anfangspunkt ϑ_1 nur von dem variablen Endpunkt ϑ_2. Es muss also, wenn man ϑ_2, t_2 durch ϑ, t ersetzt:

$$\int_{t_1}^{t} F\left(D^\mu \varphi(\vartheta), \; D^\mu \psi(\vartheta) \right) dt = J(\vartheta) \qquad \left(D^\mu = \frac{d^\mu}{dt^\mu} \right)$$

eine blosse Function von ϑ sein, und durch Differentiation nach t:

$$(1) \qquad F\left(D^\mu \varphi(\vartheta), \; D^\mu \psi(\vartheta) \right) = D\,J(\vartheta) = J'(\vartheta)\,\vartheta'$$

für eine beliebige, nur den Stetigkeitsbedingungen und der Bedingung $\vartheta' > 0$ genügende Function $\vartheta = \vartheta(t)$, also auch für $\vartheta = t$, $\vartheta' = 1$,

$$D^\mu \varphi(\vartheta) = \varphi^{(\mu)}(\vartheta), \quad D^\mu \psi(\vartheta) = \psi^{(\mu)}(\vartheta),$$

so dass wegen

$$F\left(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\quad \psi^{(\mu)}(\vartheta)\right) = J'(\vartheta)$$

nunmehr (1) geschrieben werden kann:

$$(1\,a)\quad F\left(D^{\mu}\varphi(\vartheta),\ D^{\mu}\psi(\vartheta)\right) = F\left(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\quad \psi^{(\mu)}(\vartheta)\right)\vartheta'.$$

Die Differentiationen aber kann man ausführen:

$$x' = D\,\varphi(\vartheta) = \varphi'(\vartheta)\,\vartheta',\quad x'' = \varphi''(\vartheta)\,\vartheta'^2 + \varphi'(\vartheta)\,\vartheta'',$$

u. s. w., allgemein

$$(2)\quad \begin{cases} x^{(\mu)} = D^{\mu}\varphi(\vartheta) = R_{\mu}\left(\varphi(\vartheta),\ \varphi'(\vartheta),\ \ldots\ \varphi^{(\mu)}(\vartheta),\ \vartheta',\ \ldots\ \vartheta^{(\mu)}\right), \\ \qquad \text{abgekürzt} = R_{\mu}\left(\varphi^{(\nu)}(\vartheta),\ \vartheta^{(\nu)}\right), \\ y^{(\mu)} = D^{\mu}\psi(\vartheta) = R_{\mu}\left(\psi^{(\nu)}(\vartheta),\ \vartheta^{(\nu)}\right). \end{cases}$$

Hier ist R_{μ} eine ganze rationale Function ihrer sämtlichen Argumente mit ganzzahligen positiven Coefficienten, linear und homogen in Bezug auf die ersten μ, und enthält die höchste Ableitung $\vartheta^{(\mu)}$ nur in dem einen Gliede $\varphi'(\vartheta)\,\vartheta^{(\mu)}$.

Man kann aber immer $n+1$ willkürliche Grössen $\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \ldots \vartheta^{(n)}$ ansehen als die Werte der successiven Ableitungen einer stetigen Function $\vartheta = \vartheta(t)$ für einen beliebigen Argumentwert $t = t'$; wir brauchen ja nur zu setzen

$$\vartheta(t) = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\vartheta^{(\mu)}}{\mu!}(t - t')^{\mu}.$$

Im Falle $\vartheta' > 0$ wird jede solche Function in einer gewissen Umgebung von $t = t'$ mit t immer nur zunehmen und somit allen an ϑ gestellten Forderungen genügen. Daher wird die Gleichung (1), die ja für beliebige Functionen $\vartheta(t)$ gelten sollte, nach Einsetzung der Ausdrücke (2) identisch bestehen für unbestimmte und unter einander unabhängige Grössen $\vartheta, \vartheta', \ldots \vartheta^{(n)}$ mit der

einzigen Bedingung $\vartheta' > 0$, so dass

$$\Phi = \frac{F}{\vartheta'} = J'(\vartheta) = \Phi(\vartheta)$$

von ϑ', ϑ'', ... $\vartheta^{(n)}$ unabhängig ist, also

$$(3) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta^{(\mu)}} = 0 \ (\mu = 1, 2, \ldots n), \ \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{d\Phi}{d\vartheta} = \frac{D\Phi}{\vartheta'},$$

und weiter:

$$(4) \qquad \delta_\vartheta \Phi \equiv \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta^{(\mu)}} \delta\vartheta^{(\mu)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \delta\vartheta = D\Phi \frac{\delta\vartheta}{\vartheta'} = D\Phi \,.\, \tau,$$

wo $\delta\vartheta$ eine willkürliche, mit ihren n ersten Ableitungen

$$D^\mu \delta\vartheta = \delta\vartheta^{(\mu)}$$

stetige Function von t bedeutet; auch

$$\tau = \frac{\delta\vartheta}{\vartheta'}$$

ist solch eine willkürliche Function.

Es ist aber allgemein:

$$(5) \qquad \delta_\vartheta f(\vartheta, \vartheta', \ldots \vartheta^{(n)}) \equiv \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \vartheta^{(\mu)}} \delta\vartheta^{(\mu)}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\vartheta + \varepsilon\, \delta\vartheta, \ \vartheta' + \varepsilon\, \delta\vartheta', \ \ldots) \right]_{\varepsilon = 0}$$

„die erste Variation von f in Bezug auf ϑ“ und folgt den Gesetzen:

$$\delta H(f_1, f_2, \ldots) = \frac{\partial H}{\partial f_1} \delta f_1 + \frac{\partial H}{\partial f_2} \delta f_2 + \ldots$$

$$\delta D^\mu f = D^\mu \delta f.$$

Daher ist einerseits:

$$\delta_\vartheta F \equiv \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial \vartheta^{(\mu)}} \delta \vartheta^{(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x^{(\mu)}} \delta x^{(\mu)} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mu)}} \delta y^{(\mu)} \right\}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x^{(\mu)}} (x' \tau)^{(\mu)} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mu)}} (y' \tau)^{(\mu)} \right\},$$

da

$$\delta x = \delta \varphi(\vartheta) = \varphi'(\vartheta)\, \delta \vartheta = \varphi'(\vartheta)\, \vartheta' \frac{\delta \vartheta}{\vartheta'}$$

$$= D\varphi(\vartheta) \,.\, \tau = x' \tau$$

und ebenso:

$$\delta y = y' \tau$$

ist, andrerseits aber wegen (4)

$$\delta_\vartheta F = \delta_\vartheta (\Phi \vartheta') = \delta_\vartheta \Phi \,.\, \vartheta' + \Phi\, \delta \vartheta'$$

$$= D\Phi \,.\, \tau\, \vartheta' + \Phi\, D(\vartheta' \tau)$$

$$= D(\Phi \vartheta' \tau) = D(F\tau),$$

also:

$$(6) \quad \delta_\vartheta F = \sum_{\mu=0}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x^{(\mu)}} (x' \tau)^{(\mu)} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mu)}} (y' \tau)^{(\mu)} \right\} = D(F\tau).$$

Diese Beziehung muss bestehen für beliebige Functionen x, y, τ von t, da ja auch die Functionen φ und ψ willkürlich sein sollen. Wir brauchen daher nur nach formaler Ausführung der Differentiationen die Coefficienten der τ, τ', ... $\tau^{(n)}$ beiderseits einander gleich zu setzen, um das System der von den $\tau^{(\mu)}$ unabhängigen Bedingungsgleichungen für F zu erhalten.

Diese Bedingungen sind zugleich auch hinreichend für das Bestehen der verlangten Eigenschaft. Denn sind sie erfüllt, so gelten auch (6), (4) für willkürliche φ, ψ, ϑ, τ oder $\delta\vartheta$ und daher, durch Coefficientenvergleichung, auch (3). Dann lässt sich für irgend zwei Functionen φ, ψ auch immer $J'(\vartheta)$ der Gleichung (1) gemäss bestimmen, und durch Integration folgt schliesslich:

$$\int_{t_1}^{t_2} F\left(D^\mu \varphi(\vartheta),\ D^\mu \psi(\vartheta)\right) dt = J(\vartheta_2) - J(\vartheta_1),$$

in der That nur abhängig von der durch φ, ψ bestimmten Form der Curve und ihren durch ϑ_1 und ϑ_2 bestimmten Endpunkten für die Integration, aber unabhängig von der Beziehung zwischen t und ϑ, d. h. von der besonderen Darstellungsform.

Um nun die Bedingungsgleichungen noch in andrer Gestalt nebst den zwischen beiden bestehenden Beziehungen darzustellen, schicke ich einige allgemein gültige formale Entwicklungen voraus, in denen zur Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(\mu)}} = X_\mu\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(\mu)}} = Y_\mu$$

geschrieben werde.

Nach einer in der Variationsrechnung allgemein gebräuchlichen Umformung durch partielle Integration ist für eine beliebige Function $F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})$, wenn x, y und τ irgendwelche Functionen von t bedeuten:

$$(7) \qquad \sum_{\mu=0}^{n} X_\mu\,(x'\,\tau)^{(\mu)} = P\,x'\,\tau + D\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu\,(x'\,\tau)^{(\mu-1)}\,,$$

wenn

$$(8) \qquad X_\mu = P_\mu + D\,P_{\mu+1} \qquad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots n)$$

$$(P_{n+1} = 0, \quad \text{also} \quad P_n = X_n)$$

$$P_\mu = \sum_{\varkappa=0}^{n-\mu} (-1)^\varkappa\, D^\varkappa\, X_{\mu+\varkappa} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n,\ P_0 = P).$$

Durch Entwicklung der $(x'\,\tau)^{(\mu)}$ und Zusammenfassung gleichnamiger Glieder geht (7) über in:

$$(9) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \Xi_\nu\,\tau^{(\nu)} = \Pi\,\tau + D\sum_{\nu=1}^{n} \Pi_\nu\,\tau^{(\nu-1)}\,,$$

wenn:

$$(10) \qquad \Xi_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} X_\mu\, x^{(\mu-\nu+1)}$$

$$(11) \qquad \Pi_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu-1}{\nu-1} P_\mu \, x^{(\mu-\nu+1)}, \quad \Pi = \Pi_0 = P\,x'$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Aus (9) aber folgt durch Vergleichung der Coefficienten von $\tau^{(\nu)}$ links und rechts, was sich auch durch direkte Benutzung von (8), (10), (11) nachweisen liesse:

$$(12) \qquad \Xi_\nu = \Pi_\nu + D\,\Pi_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

$$(\Pi_{n+1} = 0, \text{ also } \Pi_\nu = \Xi_\nu),$$

daher:

$$\Pi_\nu = \sum_{z=0}^{n-\nu} (-1)^z D^z \, \Xi_{\nu+z}.$$

Die analogen Beziehungen bestehen, wenn man die Ausdrücke

$$x^{(\mu)}, \quad X_\mu, \quad P_\mu, \quad \Xi_\nu, \quad \Pi_\nu$$

der Reihe nach ersetzt durch:

$$y^{(\mu)}, \quad Y_\mu, \quad Q_\mu, \quad H_\nu, \quad P_\nu,$$

und durch Zusammenziehung der entsprechenden Gleichungen erhält man aus (7), (9) und (12):

$$(7a) \quad \delta_\vartheta F = \sum_{\mu=0}^{n} \left\{ X_\mu \, (x'\tau)^{(\mu)} + Y_\mu \, (y'\tau)^{(\mu)} \right\}$$

$$= (P\,x' + Q\,y')\,\tau + D \sum_{\mu=1}^{n} \left\{ P_\mu (x'\tau)^{(\mu-1)} + Q_\mu \, (y'\tau)^{(\mu-1)} \right\}$$

$$(9a) \qquad = \sum_{\nu=0}^{n} (\Xi_\nu + H_\nu)\,\tau^{(\nu)}$$

$$= (\Pi + P)\,\tau + D \sum_{\nu=1}^{n} (\Pi_\nu + P_\nu)\,\tau^{(\nu-1)}$$

(12a) $$\Xi_\nu + H_\nu = \Pi_\nu + P_\nu + D\,(\Pi_{\nu+1} + P_{\nu+1})$$

$$\Pi_\nu + P_\nu = \sum_{\varkappa=0}^{n-\nu} (-1)^\varkappa D^\varkappa\,(\Xi_{\nu+\varkappa} + H_{\nu+\varkappa})$$

$$(\nu = 0, 1, 2 \ldots n).$$

Die bisherigen Beziehungen gelten, wenn X_μ, Y_μ beliebige Functionen von t sind. Ist aber:

$$F = F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}), \quad X_\mu = \frac{\partial F}{\partial x^{(\mu)}}, \quad Y_\mu = \frac{\partial F}{\partial y^{(\mu)}},$$

so ist nach (10):

(13) $$\Xi_0 + H_0 = \Xi + H = \sum_{\mu=0}^{n} \left\{X_\mu\, x^{(\mu+1)} + Y_\mu\, y^{(\mu+1)}\right\} = DF,$$

und weil nach (12a)

$$\Pi + P = \Xi + H - D\,(\Pi_1 + P_1)$$

(14) $$P\,x' + Q\,y' = \Pi + P = D\,(F - \Pi_1 - P_1).$$

Für solche F aber, welche unserer Forderung, d. h. der Gleichung (1a) genügen, ist

(6) $$\delta_\vartheta F = \sum_{\mu=0}^{n} \left\{X_\mu\,(x'\,\tau)^{(\mu)} + Y_\mu\,(y'\,\tau)^{(\mu)}\right\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (\Xi_\nu + H_\nu)\,\tau^{(\nu)} = D\,(F\,\tau),$$

oder wegen (7a) und (9a)

(6a) $$D\,(F\,\tau) =$$

$$(P\,x' + Q\,y')\,\tau + D \sum_{\mu=1}^{n} \left\{P_\mu (x'\,\tau)^{(\mu-1)} + Q_\mu\,(y'\,\tau)^{(\mu-1)}\right\}$$

$$= (\Pi + P)\,\tau + D \sum_{\nu=1}^{n} (\Pi_\nu + P_\nu)\,\tau^{(\nu-1)}.$$

Es müsste also $(P\,x' + Q\,y')\,\tau = (\Pi + P)\,\tau$ für willkürliches $\tau = \tau(t)$ eine vollständige Ableitung sein, was nur möglich ist, wenn

$$\Pi + P = P\,x' + Q\,y' = 0, \tag{15}$$

sodass die vorhergehende Gleichung durch Integration übergeht in:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \left\{ P_\mu\,(x'\,\tau)^{(\mu-1)} + Q_\mu\,(y'\,\tau)^{(\mu-1)} \right\} \tag{16}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} (\Pi_\nu + P_\nu)\,\tau^{(\nu-1)} = F\,\tau,$$

wo die Integrationsconstante offenbar verschwindet.

Durch Coefficienten-Vergleichung erhält man daraus mit Hilfe von (10) und (11)

$$\Xi_\nu + H_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} \left\{ X_\mu x^{(\mu-\nu+1)} + Y_\mu\,y^{(\mu-\nu+1)} \right\} = e_{\nu,1}\;F, \tag{17}$$

$$\Pi_\nu + P_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu-1}{\nu-1} \left\{ P_\mu\,x^{(\mu-\nu+1)} + Q_\mu\,y^{(\mu-\nu+1)} \right\} = e_{\nu,1}\,F \tag{18}$$

$$(\nu = 1, 2 \ldots n),$$

wo, wie auch im Folgenden,

$$e_{\mu,\nu} = 1 \quad (\mu = \nu), \qquad e_{\mu,\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

die Bedeutung des Kroneckerschen Symbols $(\delta_{\mu,\nu})$ besitzt.

Diese beiden Systeme von n Gleichungen stellen, jedes für sich allein, die vollständigen Bedingungen für die Erfüllung unserer Forderung dar. Denn die Coefficienten von τ auf beiden Seiten von (6) stimmen nach (13) identisch überein, die von $\tau^{(\mu)}$ $(\mu > 0)$ aber werden durch (17) zur Übereinstimmung gebracht. Ferner entsteht (15) wegen (14) durch einfache Differentiation aus

der zu (18) gehörigen Gleichung:

$$\Pi_1 + P_1 = F,$$

sodass auch (18) gleichbedeutend ist mit (6a). Es folgt also aus (17) für den ursprünglichen, aus (18) für den transformierten Ausdruck jedesmal dieselbe Formel:

$$\delta_{\mathfrak{z}} F = D(F\tau), \tag{6}$$

die auch als hinreichende Bedingung bereits nachgewiesen ist.

Der unmittelbare analytische Zusammenhang dieser beiden Systeme (17) und (18) wird durch die Formeln (12a) gegeben, durch deren zweite man unmittelbar (18) aus (17), durch deren erste aber umgekehrt (17) aus (18) ableiten kann.

Trotz dieser Äquivalenz wird man naturgemäss das System (17) als die einfachere, ursprünglichere Form der Bedingungen ansehen müssen, aus welcher die andere (18) erst durch Differentiation hervorgegangen ist. Doch wird gerade die zweite in Gestalt der Gleichungen (16) und

$$\Pi_1 + P_1 = \sum_{\mu=1}^{n} (P_\mu x^{(\mu)} + Q_\mu y^{(\mu)}) = F \tag{18}_1$$

bei den späteren Untersuchungen angewandt werden.

Beide Systeme haben eine einzige Gleichung gemeinsam, nämlich ($\nu = n$):

$$X_n x' + Y_n y' = P_n x' + Q_n y' \tag{17}_n, (18)_n$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} x' + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} y' = e_{n,1} F,$$

welche für $n = 1$ in der Form:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} x' + \frac{\partial F}{\partial y'} y' = F$$

als die in diesem Falle einzige Bedingung die Homogeneität der Function $F = F(x, y; x', y')$ in Bezug auf x' und y' ausdrückt.

Durch partielle Differentiation der allgemeinen Formel $(17)_n$, $(18)_n$ nach $x^{(n)}$ und $y^{(n)}$ ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\,\partial x^{(n)}}\,x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\,\partial y^{(n)}}\,y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\,\partial y^{(n)}}\,x' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)}\,\partial y^{(n)}}\,y' = 0,$$

sodass man, wie es später geschehen wird, setzen kann:

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\,\partial x^{(n)}} = y'^2 F_1, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)}\,\partial y^{(n)}} = x'^2 F_1,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\,\partial y^{(n)}} = -\,x'\,y'\,F_1,$$

wo

$$F_1 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\,\partial x^{(n)}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)}\,\partial y^{(n)}} \right) : (x'^2 + y'^2)$$

eine von $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ $(\mu = 0, 1, \ldots n)$ abhängige Function ist, welche endlich, eindeutig und stetig bleibt, so lange die partiellen Ableitungen von F es sind und x', y' nicht beide gleichzeitig verschwinden.

Der ursprünglichen Bedingungsgleichung (1) oder (1a) kann man noch eine sehr gebräuchliche Form geben, wenn man in der Umgebung einer Stelle $t = \vartheta$, wo $\varphi'(\vartheta) \gtrless 0$ ist, eine Function $\vartheta(t)$ bestimmt durch die Gleichung: $t = \varphi(\vartheta) = x$, also

$$D^\mu \varphi(\vartheta) = e_{\mu,\,1} \qquad (\mu > 0); \quad D^\mu \psi(\vartheta) = \frac{d^\mu y}{dx^\mu},$$

wo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'\,y'' - y'\,x''}{x'^3}$$

u. s. w., allgemein:

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{S_\mu\,(x', x'', \ldots x^{(\mu)};\; y', y'', \ldots y^{(\mu)})}{x'^{\,2\mu-1}} = \frac{S_\mu\,(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})}{x'^{\,2\mu-1}}$$

gesetzt werden kann, wenn $x^{(\mu)} = D^\mu \varphi(\vartheta)$, $y^{(\mu)} = D^\mu \psi(\vartheta)$ bedeutet für beliebige Beziehungen zwischen t und ϑ, also auch für $\vartheta = t$, $x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(\vartheta)$, $y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(\vartheta)$. Setzt man nun die oben gefundenen Ausdrücke in (1a) ein, so erhält man:

$$F\left(x,\,1,\,0,\,\ldots\,0;\;y,\;\frac{dy}{dx},\,\ldots\,\frac{d^n y}{dx^n}\right) = F\left(x,\;\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right)$$

$$= F\left(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\;\psi^{(\mu)}(\vartheta)\right)\frac{d\vartheta}{dx}\,.$$

Nun ist, wieder nach (1a), für beliebiges $\vartheta = \vartheta(t)$

$$F(x^{(\mu)},\;y^{(\mu)}) = F(D^\mu\varphi(\vartheta),\;D^\mu\psi(\vartheta)) = F\left(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\;\psi^{(\mu)}(\vartheta)\right)\vartheta'$$

$$= F\left(x,\;\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right)\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = F\left(x,\;\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right)x',$$

d. h.

$$(20)\qquad F(x^{(\mu)},\;y^{(\mu)}) = F\left(x,\,y,\,\frac{dy}{dx},\,\ldots\,\frac{d^n y}{dx^n}\right)x',$$

eine identische Beziehung, wenn man für $\dfrac{d^\mu y}{dx^\mu}$ ihre eben gefundenen Ausdrücke durch die $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ einsetzt.

Das angewandte Verfahren und die gefundenen Bedingungsgleichungen lassen sich unmittelbar auf den allgemeineren Fall einer grösseren Anzahl von Variablen $x, y, z, \ldots$ übertragen. So wird z. B. ein Integral:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x^{(\mu)},\;y^{(\mu)},\;z^{(\mu)})\,dt$$

über ein Stück 1 2 einer Raumcurve: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ erstreckt, einen von der besonderen Form der Darstellung, d. h. von der Wahl des Parameters t unabhängigen Wert besitzen, wenn:

$$(17),\ (18)\qquad \Xi_\nu + H_\nu + Z_\nu = \Pi_\nu + P_\nu + T_\nu = e_{\nu,1}F$$

$$(\nu = 1,\,2,\,\ldots\,n),$$

wo die Ausdrücke Z_ν, T_ν ebenso nach z gebildet sind wie Ξ_ν, Π_ν; H_ν, P_ν nach x und y.

Die Untersuchung ist hier mit grösserer Vollständigkeit geführt worden, als es für die unmittelbare Anwendung auf das Problem der Variationsrechnung notwendig gewesen wäre; die Frage ist als eine Aufgabe von selbständigem Interesse aufgefasst

worden, die bisher eine ausreichende Beantwortung noch nicht gefunden zu haben scheint.

Zuerst, soweit ich in Erfahrung bringen konnte, stellt sie Lagrange in seinen „Leçons sur le Calcul des Fonctions“ in dem der Variationsrechnung gewidmeten Abschnitte und zwar in der hier durch (20) gegebenen Form, und er beweist hier die Notwendigkeit der einen Gleichung:

$$P x' + Q y' = 0 \tag{15}$$

(in meiner Bezeichnung), ohne sich über die hinreichenden Bedingungen zu äussern. Nach ihm gelangt Poisson in seinem „Mémoire sur le Calcul des Variations“ auf ähnlichem Wege zu demselben Ergebnis, hält aber, wie er ausdrücklich erklärt, diese eine Bedingung zugleich für hinreichend, ein Irrtum, den auch Todhunter (History on the Progress of the Calculus of Variations) in seiner Besprechung der Poissonschen Schrift wiederholt hat.

Dass (15) in Wirklichkeit für keinen Wert von n eine hinreichende Bedingung ist, geht schon daraus hervor, dass

$$F = C = \text{const.}$$

vermöge $P = 0$, $Q = 0$ diese Bedingung befriedigt, während doch

$$C = \frac{C}{\vartheta'}\vartheta' = \frac{C}{x'}x'$$

von keiner der Formen (1a) oder (20) ist, und auch das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} C\,dt = C\,(t_2 - t_1)$$

von der Wahl des Parameters abhängig ist. Eine beliebige Function F von der in Frage stehenden Eigenschaft muss daher nach Hinzufügung einer beliebigen, nicht verschwindenden Constanten diese Eigenschaft verlieren, während $P x' + Q y' = 0$ unverändert bestehen bleibt. Thatsächlich drückt die Gleichung (15) nur die Bedingung dafür aus, dass $F(x^{(u)}, y^{(u)})$, wenn für y irgend eine Function von x, oder allgemeiner, wenn für x, y irgend welche Functionen von ϑ eingesetzt werden, „integrabel“ sei, dass nämlich:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)})\,dt = \int_{t_1}^{t_2} F_0(\vartheta,\ \vartheta',\ldots\vartheta^{(n)})\,dt = \Big[J(\vartheta,\vartheta',\ldots\vartheta^{(n)})\Big]_{t_1}^{t_2}$$

nur von den Endwerten:

$$\vartheta_1,\ \vartheta_1',\ \ldots\ \vartheta_1^{(n)};\ \vartheta_2,\ \vartheta_2',\ \ldots\ \vartheta_2^{(n-1)},$$

nicht aber von dem ganzen Verlauf, von der Form der Function ϑ abhängt.

Die bekannte Eulersche „Integrabilitätsbedingung“

$$\sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} D^{\mu} \frac{\partial F}{\partial \vartheta^{(\mu)}} = 0$$

ist nämlich äquivalent der Eigenschaft, dass der Ausdruck:

$$\delta_{\vartheta} F = \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\delta\vartheta + \frac{\partial F}{\partial \vartheta'}\delta\vartheta' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \vartheta^{(n)}}\delta\vartheta^{(n)}$$

seinerseits „integrabel“ ist für eine willkürliche Function $\delta\vartheta = \vartheta'\tau$.

Es ist aber nach (7a)

$$\delta_{\vartheta} F = (P x' + Q y')\,\tau + D \sum_{\mu=1}^{n} \Big\{ P_{\mu}\,(x'\,\tau)^{(\mu-1)} + Q_{\mu}\,(y'\,\tau)^{(\mu-1)} \Big\},$$

also die Integrabilitätsbedingung, wie behauptet:

$$P x' + Q y' = 0. \tag{15}$$

So ist z. B.:

$$F = x\,y'' - y\,x'' + x\,y\,x' = \frac{d}{dt}(x\,y' - y\,x') + x\,y\,x'$$

nach t integrabel, sobald für y irgend eine Function von x eingesetzt wird, das Integral aber hängt dann immer noch von x' oder von $y' = \dfrac{dy}{dx}\,x'$ ab, ändert sich also auch mit der Darstellung der Curve, über welche die Integration erstreckt wird.

In der That ist hier auch:

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x''} = y'' + y\,x' - \frac{d}{dt}(xy) - \frac{d^2}{dt^2}\,y = -\,xy'$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = -\,x'' + x\,x' + \frac{d^2}{dt^2}\,x = x\,x',$$

also

$$P\,x' + Q\,y' = 0, \tag{15}$$

während doch:

$$\frac{\partial F}{\partial x''}\,x' + \frac{\partial F}{\partial y''}\,y' = -\,y\,x' + x\,y'$$

nicht identisch verschwindet, $(17)_2$ also nicht erfüllt ist.

Das Verfahren, dessen wir uns zur Ableitung der Bedingungsgleichungen für F bedienten, lässt sich leicht auf verwandte Aufgaben übertragen.

Eine Function

$$\Phi\,(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)}) = \Phi\left(D^\mu\varphi(\vartheta),\ \ D^\mu\psi\,(\vartheta)\right)$$

$$(\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n,\ \ \vartheta = \vartheta\,(t))$$

soll dieselbe Eigenschaft besitzen wie das Integral von F, d. h. sie soll von der besonderen Darstellung der Curve $x = \varphi\,(\vartheta)$, $y = \psi(\vartheta)$, also von ϑ', ϑ'', $\ldots$ $\vartheta^{(n)}$ unabhängig sein und nach Wahl von φ, ψ nur noch von ϑ abhängen, so dass (vergl. (1a)):

$$\Phi\left(D^\mu\varphi(\vartheta),\ \ D^\mu\psi(\vartheta)\right) = \Phi\left(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\ \ \psi^{(\mu)}(\vartheta)\right). \tag{21}$$

Dann muss Φ wie vorher $J'\,(\vartheta)$ der Gleichung (4) genügen:

$$\delta_\vartheta\,\Phi = \sum_{\mu=0}^{n}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x^{(\mu)}}\,\delta\,x^{(\mu)} + \frac{\partial\Phi}{\partial y^{(\mu)}}\,\delta\,y^{(\mu)}\right\} \tag{22}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n}\left\{X_\mu\,(x'\,\tau)^{(\mu)} + Y_\mu\,(y'\,\tau)^{(\mu)}\right\} = D\,\Phi\cdot\tau,$$

wenn jetzt:

$$X_\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial x^{(\mu)}}, \quad Y_\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(\mu)}}$$

und wieder $\delta \vartheta = \vartheta' \tau$ gesetzt wird, wo τ eine willkürliche Function von t ist.

Nun gelten für $\delta_\vartheta \Phi$ dieselben Umformungen wie für $\delta_\vartheta F$, so dass man schliesslich mit Anwendung derselben Bezeichnungen die verlangten Bedingungen in einer der Formen schreiben kann:

$$(23) \qquad \begin{aligned} \Xi_\nu + H_\nu &= 0 \\ \Pi_\nu + P_\nu &= 0 \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Wenn man in (21) wieder $t = \varphi(\vartheta) = x$ einsetzt, so ergiebt sich:

$$(24) \quad \Phi(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) = \Phi\left(x, 1, 0, \ldots 0; y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

$$= \Phi\left(x, \frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right),$$

wo wie in (20) wieder

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{S_\mu(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})}{x'^{2\mu-1}}$$

gesetzt werden kann.

Ebenso kann man auch die Bogenlänge einführen:

$$t = s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

also:

$$\Phi(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) = \Phi\left(\frac{d^\mu x}{ds^\mu}, \frac{d^\mu y}{ds^\mu}\right)$$

setzen. Es ist aber:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha_1, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha_1,$$

wo α_1 den von Tangente und x-Richtung gebildeten Winkel bezeichnet, und es können die

$$\frac{d^\mu x}{ds^\mu} = \frac{d^{\mu-1}\cos\alpha_1}{ds^{\mu-1}}, \qquad \frac{d^\mu y}{ds^\mu} = \frac{d^{\mu-1}\sin\alpha_1}{ds^{\mu-1}}$$

ausgedrückt werden als ganze rationale Functionen von:

$$\cos\alpha_1, \quad \sin\alpha_1, \quad \alpha_2 = \frac{d\alpha_1}{ds}, \quad \ldots \quad \alpha_\mu = \frac{d^{\mu-1}\alpha_1}{ds^{\mu-1}},$$

so dass schliesslich:

$$(25) \qquad \Phi(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) = \Phi_1(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Phi(x, y, \alpha_\mu).$$

Hier ist aber:

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}, \qquad \alpha_2 = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (die Krümmung)}$$

und allgemein:

$$\alpha_\mu = \frac{d^{\mu-1}\alpha_1}{ds^{\mu-1}} = \frac{d^{\mu-2}\alpha_2}{ds^{\mu-2}} = \frac{T_\mu(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3\mu-3}{2}}} \qquad (\mu > 1),$$

wo $T_\mu(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$ eine ganze rationale Function von $x', x'', \ldots x^{(\mu)}$; $y', y'', \ldots y^{(\mu)}$ bezeichnet.

Diese Ausdrücke der α_μ besitzen dieselbe Eigenschaft (21), unabhängig von der Differentiationsvariablen zu sein, wie Φ selbst. Nach (25) lässt sich also jede Function ψ von der betrachteten Eigenschaft, jede „Osculations-Invariante“, wie sie aus nachher anzugebendem Grunde genannt werden möge, durch die $n+2$ besonderen $x, y, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ ausdrücken, ebenso wie nach (24) durch die $x, y, \frac{d^\mu y}{dx^\mu}$. Doch hat die Darstellungsweise (25) den wesentlichen Vorzug vor der anderen, dass die α_μ immer endlich bleiben für alle „regulären“ Stellen der Curven, d. h. solche, wo die $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ endlich sind und gleichzeitig $x'^2 + y'^2 > 0$, die x' und y' nicht beide verschwinden.

Auch für die Function F von der früher untersuchten Beschaffenheit ergiebt sich hieraus eine neue Darstellungsweise. Setzt man nämlich:

$$F(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)}) = \Phi\,\frac{ds}{dt} = \Phi(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)})\,\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

also für $x = \varphi(\vartheta)$, $y = \psi(\vartheta)$, je nachdem man nach t oder ϑ differentiiert, einerseits

$$F(D^\mu\,\varphi(\vartheta),\ D^\mu\,\psi(\vartheta))$$

$$= \Phi(D^\mu\,\varphi(\vartheta),\ D^\mu\,\psi(\vartheta))\,.\,\sqrt{\varphi'^2(\vartheta) + \psi'^2(\vartheta)}\ \vartheta',$$

andererseits aber

$$F(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\ \psi^{(\mu)}(\vartheta)) = \Phi(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\ \psi^{(\mu)}(\vartheta))\,\sqrt{\varphi'^2(\vartheta) + \psi'^2(\vartheta)},$$

so wird nach:

(1a) $$F(D^\mu\,\varphi(\vartheta),\ D^\mu\,\psi(\vartheta)) = F(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\ \psi^{(\mu)}(\vartheta))\ \vartheta',$$

jetzt:

$$\Phi(D^\mu\,\varphi(\vartheta),\ D^\mu\,\psi(\vartheta)) = \Phi(\varphi^{(\mu)}(\vartheta),\ \psi^{(\mu)}(\vartheta)),$$

Φ ist also eine „Osculations-Invariante“ und daher nach (25)

(26) $$F(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)}) = \Phi(x, y, \alpha_\mu)\,\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$F\,dt = \Phi(x, y, \alpha_\mu)\,ds.$$

Der für Functionen der hier betrachteten Art eingeführte Ausdruck gründet sich auf ihre Bedeutung für die Berührung oder „Osculation“ zweier Curven, über welche sich hier einige Bemerkungen anschliessen mögen, die in den folgenden Untersuchungen vielfache Anwendung finden werden.

Wenn zwei Curven $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$; $x = \bar{\varphi}(v)$, $y = \bar{\psi}(v)$ in den Punkten $u = u_0$, $v = v_0$, in denen sie sich regulär verhalten, wo also auch $\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)$ und $\bar{\varphi}'^2(v) + \bar{\psi}'^2(v) > 0$ sind, gemeinsame Werte besitzen für x, y, α_1, α_2, . . . α_m und damit für alle Osculations-Invarianten $\Phi(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)})$ bis zur $m$ten Ordnung ($\mu = 0, 1, \ldots m$), so sagt man, sie berühren einander von $m$ter Ordnung in dem Punkte:

$$x_0 = \varphi(u_0) = \bar{\varphi}(v_0), \qquad y_0 = \psi(u_0) = \bar{\psi}(v_0).$$

Genauer wäre dieses Verhältnis auszudrücken: sie berühren einander „von mindestens $m$ter Ordnung“, noch genauer „von einer Ordnung $> m-1$“, im Sinne der strengeren von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen gegebenen Definition, der zufolge die wahre Ordnungszahl der Berührung auch gebrochen sein kann. Doch will ich mich hier immer der abgekürzten Ausdrucksweise bedienen.

Damit der betrachtete Umstand eintritt, müssen sich, wie sich streng beweisen liesse, für geeignete unabhängige Variable die Ableitungen der Coordinaten bis zur $m$ten Ordnung zur Übereinstimmung bringen lassen, d. h. es müssen sich u und v so als Functionen eines beliebigen Parameters t darstellen lassen, dass für:

$$t = t_0, \qquad D^\mu u = \frac{d^\mu u}{dt^\mu} = u_0^{(\mu)}, \qquad D^\mu v = \frac{d^\mu v}{dt^\mu} = v_0^{(\mu)}$$

die Beziehungen bestehen:

$$D^\mu \varphi(u) = D^\mu \overline{\varphi}(v), \qquad D^\mu \psi(u) = D^\mu \overline{\psi}(v) \tag{27}$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots m)$$

oder, was nach (2) auf dasselbe hinauskommt, dass die Gleichungen:

$$R_\mu\left(\varphi^{(\nu)}(u_0),\ u_0^{(\nu)}\right) = R_\mu\left(\overline{\varphi}^{(\nu)}(v_0),\ v_0^{(\nu)}\right)$$

$$R_\mu\left(\psi^{(\nu)}(u_0),\ u_0^{(\nu)}\right) = R_\mu\left(\overline{\psi}^{(\nu)}(v_0),\ v_0^{(\nu)}\right)$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots m)$$

durch geeignete Werte der $u_0^{(\mu)}$, $v_0^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, \ldots m)$ befriedigt werden können.

Ist dies der Fall, so ist auch in der That an der betrachteten Stelle nach (21):

$$\Phi\left(\varphi^{(\mu)}(u), \psi^{(\mu)}(u)\right) = \Phi\left(D^\mu \varphi(u),\ D^\mu \psi(u)\right) \tag{28}$$
$$= \Phi\left(D^\mu \overline{\varphi}(v),\ D^\mu \overline{\psi}(v)\right) = \Phi\left(\overline{\varphi}^{(\mu)}(v), \overline{\psi}^{(\mu)}(v)\right).$$

Hierbei ist jedoch für $m \geqq 1$, d. h. wenn eine wirkliche Berührung stattfinden soll, immer noch $u_0' , v_0' \gtrless 0$ vorauszusetzen, weil wegen

$$\varphi'(u)\,u' = \bar{\varphi}'(v)\,v', \qquad \psi'(u)\,u' = \bar{\psi}'(v)\,v'$$

auch

$$\sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}\;u' = \pm\sqrt{\bar{\varphi}'^2(v) + \bar{\psi}'^2(v)}\;v'$$

sein und daher

$$\frac{u'}{v'} = \pm\frac{\sqrt{\bar{\varphi}'^2(v) + \bar{\psi}'^2(v)}}{\sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}}$$

einen bestimmten von 0 und ∞ verschiedenen Wert annehmen muss. Auch ist dabei zu unterscheiden zwischen „gleichgerichteter Berührung", bei welcher u' und v', mithin auch $\varphi'(u)$ und $\bar{\varphi}'(v)$, $\psi'(u)$ und $\bar{\psi}'(v)$ gleiches Vorzeichen haben, von der „entgegengesetzten" Berührung, wo alle diese Grössen-Paare entgegengesetzte Vorzeichen besitzen; im ersten Falle werden die Coordinaten der beiden Curven in der Nähe des Berührungspunktes in gleichem, im anderen Falle in entgegengesetztem Sinne sich ändern, wenn jede Curve im Sinne der wachsenden Variablen u oder v beschrieben gedacht wird. Bei den späteren Anwendungen wird es immer so eingerichtet werden, dass nur „gleichgerichtete" Berührungen in Betracht kommen.

Da die Variable t in der zuerst gegebenen Definition der Berührung selbst keine Rolle spielt, so müssen auch die Bedingungen (27) bestehen bleiben, wenn man darin diese Variable durch eine beliebige Function derselben ersetzt.

Sei etwa:

$$(27) \qquad D^\mu_\vartheta\,\varphi(u) = D^\mu_\vartheta\,\bar{\varphi}(v), \qquad D^\mu_\vartheta\,\psi(u) = D^\mu_\vartheta\,\bar{\psi}(v)$$

$$\left(\mu = 0, 1, 2, \ldots m; \qquad D^\mu_\vartheta = \frac{d^\mu}{d\vartheta^\mu}\right),$$

so wird mit Hilfe von (2) in der That auch:

$$D^\mu_t\,\varphi(u) = R_\mu\left(D^\nu_\vartheta\,\varphi(u),\ \vartheta^{(\nu)}\right) = R_\mu\left(D^\nu_\vartheta\,\bar{\varphi}(v),\ \vartheta^{(\nu)}\right) = D^\mu_t\,\bar{\varphi}(v)$$

$$D^\mu_t\,\psi(u) = R_\mu\left(D^\nu_\vartheta\,\psi(u),\ \vartheta^{(\nu)}\right) = R_\mu\left(D^\nu_\vartheta\,\bar{\psi}(v),\ \vartheta^{(\nu)}\right) = D^\mu_t\,\bar{\psi}(v)$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots m),$$

wo die $\vartheta^{(\mu)} = \frac{d^\mu \vartheta}{dt^\mu}$ an der betrachteten Stelle bis auf $\vartheta' \gtrless 0$ willkürlich gewählt sein können. Nun kann man die Variable t immer so wählen, dass u eine beliebige Function von t wird, also beliebig vorgeschriebene Werte der $u^{(\mu)} = \frac{d^\mu u}{dt^\mu}$ im Berührungspunkte annimmt; dann aber sind die anderen Grössen $v^{(\mu)} = \frac{d^\mu v}{dt^\mu}$ durch die Gleichungen (27) vollständig bestimmt. Diese lassen sich nämlich nach (2) in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} R_\mu(\overline{\varphi}^{(\nu)}(v),\ v^{(\nu)}) &= D^\mu \varphi(u) \\ R_\mu(\overline{\psi}^{(\nu)}(v),\ v^{(\nu)}) &= D^\mu \psi(u) \end{aligned} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots m) \tag{29}$$

und gestatten eine successive eindeutige Auflösung nach v', v'', . . $v^{(n)}$ durch Benutzung der oberen oder der unteren Gleichungen, je nachdem $\overline{\varphi}'(v)$ oder $\psi'(v)$ von Null verschieden ist.

So kann man auch $t = u$, $u^{(\mu)} = e_{\mu,1}$ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ vorschreiben und erhält dann die Bedingungen der Osculation in der Form:

$$\begin{aligned} \varphi^{(\mu)}(u) &= D^\mu \overline{\varphi}(v) = R_\mu(\overline{\varphi}^{(\nu)}(v),\ v^{(\nu)}) \\ \psi^{(\mu)}(u) &= D^\mu \overline{\psi}(v) = R_\mu(\overline{\psi}^{(\nu)}(v),\ v^{(\nu)}) \end{aligned} \tag{30}$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots m),$$

wo die u, $v^{(\mu)}$ für den Berührungspunkt zu nehmen sind und wo im Falle „gleichgerichteter“ Berührung immer $v' > 0$ angenommen werden muss.

Zweiter Abschnitt.

Definition und erste notwendige Bedingungen des Minimums.

Indem wir ein Maximum oder Minimum eines Integrales

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$$

suchen, können wir durch die Substitution $F \| -F$ den Fall des Maximums auf den des Minimums zurückführen, brauchen uns also ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur mit dem letzteren zu beschäftigen. Unsere Aufgabe ist demnach die folgende:

Ist

$$F(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)}) = F(x,\ x',\ \ldots x^{(n)};\ y,\ y',\ \ldots y^{(n)})$$

eine vorgeschriebene analytische Function ihrer sämtlichen Argumente, die im ganzen betrachteten Bereiche den Charakter einer ganzen Function besitzt und den im ersten Abschnitte entwickelten Integrabilitätsbedingungen genügt, so suchen wir unter der Gesamtheit A aller Curven

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

die gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genügen, eine solche besondere Curve a, welche einen kleineren Wert des auf der Curve zwischen bestimmten Grenzen erstreckten Integrales

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)})\,dt \qquad \left(x^{(\mu)} = \frac{d^\mu x}{dt^\mu},\ \ y^{(\mu)} = \frac{d^\mu y}{dt^\mu}\right)$$

liefert als alle benachbarten Curven $\bar{a}$ derselben Gesamtheit A,

so dass immer:

$$\Delta J = J(\bar{a}) - J(a) > 0 \tag{31}$$

wird.

Die unsere Gesamtheit A definierenden Bedingungen mögen sich für die nachstehenden Untersuchungen auf die folgenden beschränken.

1. Grenzbedingungen. Alle Curven A sollen an beiden Grenzen der Integration $t = t_1$ und $t = t_2$ in gegebenen Punkten 1 und 2 zwei gegebene analytische Curven d_1 und d_2

$$x = k_1(t), \quad y = l_1(t); \quad x = k_2(t), \quad y = l_2(t)$$

von $n-1$ter Ordnung berühren, so dass nach (30) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} D^\mu \varphi(\vartheta_1) &= k_1^{(\mu)}(t_1') = k_1^{(\mu)}, \quad D^\mu \psi(\vartheta_1) = l_1^{(\mu)}(t_1') = l_1^{(\mu)} \\ D^\mu \varphi(\vartheta_2) &= k_2^{(\mu)}(t_2') = k_2^{(\mu)}, \quad D^\mu \psi(\vartheta_2) = l_2^{(\mu)}(t_2') = l_2^{(\mu)} \end{aligned} \tag{32}$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

durch passende Werte der $\vartheta_1^{(\mu)} = \vartheta_1^{(\mu)}(t_1')$ und $\vartheta_2^{(\mu)} = \vartheta_2^{(\mu)}(t_2')$ $(\vartheta_1 = t_1, \vartheta_2 = t_2)$ an den Stellen $t = t_1'$ und $t = t_2'$ befriedigt werden können; oder, was dasselbe ist, alle diese Curven sollen an den Grenzen vorgeschriebene Werte der Osculations-Invarianten $x, y, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ besitzen.

2. Stetigkeitsbedingungen.

α) Damit die über die Curven A erstreckten Integrale immer einen bestimmten Sinn haben, wollen wir vorläufig voraussetzen, dass sich das ganze Intervall $t_1 \ldots t_2$ jedesmal in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegen lässt, in deren jedem

$$x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t), \quad y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n) \tag{33}$$

eindeutige und stetige Functionen von t sind. Allerdings ist die Convergenz der Integrale auch unter allgemeineren Voraussetzungen möglich, worauf aber hier zur Vereinfachung der Untersuchung keine Rücksicht genommen werden soll.

β) Ausserdem sollen die Functionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ der Curven A mit ihren r ersten Ableitungen im ganzen
(34) Integrations-Intervall ausnahmslos stetig verlaufen, wo $r \geqq 0$ vorläufig unbestimmt bleibt, und für $r \geqq 1$ der Bedingung genügen:

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \geqq \gamma^2 > 0, \tag{35}$$

sodass „singuläre Punkte“ $(\varphi'(t) = 0,\ \psi'(t) = 0)$ ausgeschlossen sind. Es wird sich nämlich (vergl. Satz IV) zeigen, dass ohne eine solche Voraussetzung ein Minimum überhaupt unmöglich wäre.

Streng genommen brauchten die $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ $(\mu \leqq r)$ nicht selbst immer stetig zu bleiben, sondern nur die „Osculations-Invarianten“ $\Phi(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})$ bis zur $r$ten Ordnung, also namentlich die x, y, $\alpha_1, \ldots \alpha_r$, die nach (25) alle übrigen bestimmen. Denn durch Veränderung der Differentiations-Variablen, oder, was dasselbe ist, der „Darstellung“ der Curve für einzelne Teile des Intervalls, wodurch etwa die $\varphi^{(\mu)}(\vartheta)$, $\psi^{(\mu)}(\vartheta)$ in $D^\mu\varphi(\vartheta)$, $D^\mu\psi(\vartheta)$ übergehen, würde die Stetigkeit der $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, wenn sie einmal bestände, beliebig aufgehoben und wieder eingeführt werden können. Es genügte also, die Stetigkeit der $\varphi^{(\mu)}(t)$, $\psi^{(\mu)}(t)$ für die einzelnen Teile der Curve vorauszusetzen, wenn nur ausserdem an den Übergangsstellen immer Berührungen $r$ter Ordnung angenommen werden. Dieser Fall aber wird sich durch eine geeignete Darstellung der Curve immer vermeiden lassen, und so soll denn auch den folgenden Untersuchungen die Bedingung (34) in voller Strenge zu Grunde gelegt werden.

Alle diesen Bedingungen (32)—(35) genügenden Curven A wollen wir als „erlaubte Curven“, den Übergang von einer zur anderen als eine „erlaubte Variation“ bezeichnen. Anderweitige Beschränkungen der Curven A sollen hier nicht betrachtet, überall soll „freie Variation“ vorausgesetzt werden.

Einer sorgfältigen Untersuchung bedarf jetzt noch der Begriff der „benachbarten“ Curven $(\bar{a})$, dessen Auffassung für das ganze Problem von entscheidender Bedeutung ist.

Herr Prof. Weierstrass betrachtet als zu a „benachbarte“ Curven $\bar{a}$ alle diejenigen, welche ganz innerhalb eines gewissen, durch eine Begrenzung C eingeschlossenen Flächenstreifens ver-

laufen, wenn C das Curvenstück a vollständig umgiebt und ihm nirgend unendlich nahe kommt. Ist δ der kürzeste Abstand zwischen C und a, so liegen im Innern des Streifens alle Punkte, die von a Entfernungen $< \delta$ besitzen, und umgekehrt wird eine zweite Begrenzungscurve C' derselben Art, für welche δ den grössten Abstand von a darstellt, nur solche Punkte einschliessen, die a näher kommen als auf die Entfernung δ. Dieses zweite, durch C' eingeschlossene Gebiet wird aber für die Frage nach dem Minimum dieselbe Rolle spielen wie das grössere C, so dass man auch alle die Curven A als „benachbarte“ betrachten kann,

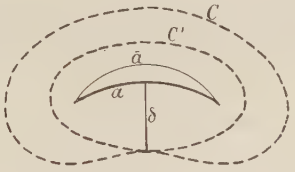

Fig. 1.

deren sämtliche Punkte von a Abstände $< \delta$ besitzen, oder, analytisch ausgedrückt, unter den A alle solchen Curven

$$x = \overline{\varphi}(\lambda), \quad y = \overline{\psi}(\lambda),$$

für welche zu jedem Werte λ zwischen λ_1 und λ_2 stets ein $t = \varkappa$ zwischen t_1 und t_2 so bestimmt werden kann, dass

$$\sqrt{(\overline{\varphi}(\lambda) - \varphi(\varkappa))^2 + (\overline{\psi}(\lambda) - \psi(\varkappa))^2} < \delta,$$

also auch

$$|\overline{\varphi}(\lambda) - \varphi(\varkappa)| < g, \quad |\overline{\psi}(\lambda) - \psi(\varkappa)| < g$$

sicher für $g \geqq \delta$. Bestehen aber umgekehrt diese letzten Ungleichheiten für $g \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, so folgt daraus wieder die vorhergehende.

Ein Minimum wird daher für a dann und nur dann stattfinden, wenn alle diejenigen erlaubten Curven ein grösseres Integral als a liefern, welche für irgend ein constantes positives g den beiden Ungleichheiten genügen.

Die so entwickelte Definition ist aber für unseren allgemeineren Fall nicht ausreichend, da sie die Existenz eines Mini-

mums allzusehr beschränken, ja vielleicht überhaupt unmöglich machen würde. Wir müssen vielmehr voraussetzen, dass wenigstens in den Fällen $n > 1$ nicht nur die Punkte der Curven $\bar{a}$ solchen von a hinreichend nahe kommen, sondern auch die Tangentenrichtungen, die Krümmungen u. s. w., allgemein die Osculations-Invarianten bis zu einer gewissen Ordnung m. Es sollen also als „benachbart" angesehen werden alle solchen Curven $x = \bar{\varphi}(\lambda)$, $y = \bar{\psi}(\lambda)$, für welche zu jedem λ des ganzen Intervalls immer ein $\varkappa$ zwischen t_1 und t_2 so bestimmt werden kann, dass eine Anzahl Ungleichheitsbedingungen befriedigt werden von der Form:

$$(36) \qquad \left| \Phi\left(\bar{\varphi}^{(\mu)}(\lambda),\ \bar{\psi}^{(\mu)}(\lambda)\right) - \Phi\left(\varphi^{(\mu)}(\varkappa),\ \psi^{(\mu)}(\varkappa)\right) \right| < \delta,$$

wo

$$\Phi(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)}) = \Phi(x,\ x', \ldots x^{(m)};\ y,\ y', \ldots y^{(m)})$$

eine Function von der Eigenschaft (21) und δ eine von λ unabhängige Grösse ist.

Diese Bedingungen lassen sich wieder auf die zwischen den Coordinaten selbst und ihren Ableitungen bestehenden Ungleichheiten zurückführen:

$$(37) \qquad \left| D^\mu \bar{\varphi}(\lambda) - \varphi^{(\mu)}(\varkappa) \right| < g_\mu, \qquad \left| D^\mu \bar{\psi}(\lambda) - \psi^{(\mu)}(\varkappa) \right| < g_\mu$$

$$(\mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots m),$$

wo für ein jedes λ ausser $\varkappa$ noch die Grössen $\lambda' > 0$, $\lambda'', \ldots \lambda^{(m)}$, die Werte der ersten m Ableitungen einer Function $\lambda(t) = \lambda(t;\ \lambda)$ für $t = \varkappa$, beliebig angenommen werden können. Dabei brauchen die zu verschiedenen λ gehörigen $\varkappa$, $\lambda^{(\mu)}$ von vornherein in keinen Beziehungen zu einander zu stehen, während die positiven Grössen g, $g_1, \ldots g_m$ von λ unabhängige bestimmte Werte haben müssen.

Die Willkürlichkeit der Parameterdarstellung kommt für die Curven $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ hier nicht in Betracht, da jede Veränderung der Darstellung offenbar nur die λ', $\lambda'', \ldots \lambda^{(m)}$ ändern würde. Dagegen muss immer eine bestimmte Darstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ von a zu Grunde gelegt werden, ihre Veränderung müsste unter Umständen eine Veränderung der g_μ zur Folge haben, wenn die Beziehungen (37) fortbestehen sollen.

Wie leicht zu zeigen ist, lassen sich die g_μ immer so klein angeben, dass für alle den Bedingungen (37) genügenden Curven $\bar{a}$ auch Bedingungen der Form (36) in beliebiger Anzahl und für beliebig kleine δ befriedigt werden können, und umgekehrt giebt es immer eine Anzahl von Ungleichheiten (36) mit so kleinen Werten der δ, dass auch die (37) gelten müssen für passende $\varkappa$, $\lambda^{(\mu)}$ und beliebig klein vorgeschriebene g_μ. Doch wird dabei vorausgesetzt, dass jedes $\Phi(\varphi^{(\mu)}(t), \psi^{(\mu)}(t))$ auf dem ganzen Curvenstücke a überall endlich bleibt.

Von a soll also behauptet werden, es liefere ein Minimum in einer „Nachbarschaft m ter Ordnung", falls sich für irgend eine Darstellung: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ von a positive Grössen g, $g_1, \ldots g_m$ so angeben lassen, dass alle „erlaubten" Curven $\bar{a}$

$$x = \bar{\varphi}(\lambda), \quad y = \bar{\psi}(\lambda),$$

die für alle in Betracht kommenden λ und für jedesmal passend bestimmte $\varkappa$, $\lambda^{(\mu)}$ den Bedingungen (37) genügen, Integrale liefern

$$J(\bar{a}) > J(a).$$

Die „Ordnung der Nachbarschaft" m wird später auf die Fälle $m = n - 1$ und $m = n$ beschränkt werden, welche allein für unsere Untersuchung Interesse bieten.

Man erkennt, dass die hier gegebene Definition der „benachbarten Curven" sich ebenso wie die Weierstrass'sche nur auf ihr Verhalten in jedem einzelnen Punkte bezieht, nicht aber auf ihren allgemeinen Verlauf oder eine specielle Darstellungsform.

Um die Analogie noch deutlicher hervorzuheben, kann man *die Gesamtheit aller Eigenschaften, die eine Curve in einem bestimmten Punkte mit allen sie von m ter Ordnung berührenden Curven gemeinsam hat*, also die *Gesamtheit der Osculations-Invarianten* $\Phi(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})$ bis zur m ten Ordnung, in einen einzigen Begriff, den eines „Curvenelementes m ter Ordnung", zusammenfassen, der sich für $m = 0$ auf den eines einfachen Punktes reduciert und somit als dessen Erweiterung aufgefasst werden kann. Bestimmt wird ein solches „Element" nach (24) und (25) durch die Werte der x, y, $\frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}$ oder der x, y, $\alpha_1, \ldots \alpha_m$, also durch

$m+2$ unabhängige Variable, durch die $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ $(\mu=0, 1, \ldots m)$ selbst aber nur insofern, als dabei von allen nur durch die willkürliche Wahl der Variablen t entstehenden Verschiedenheiten abgesehen werden muss. Es müssen nämlich zwei Elemente $(\varphi^{(\mu)}(\vartheta), \psi^{(\mu)}(\vartheta))_m$ und $(D^\mu\varphi(\vartheta), D^\mu\psi(\vartheta))_m$ für beliebige Werte der $\vartheta', \ldots \vartheta^{(m)}$ als identisch betrachtet werden, da sie nach (21) in Bezug auf sämtliche Osculations-Invarianten bis zur Ordnung m übereinstimmen. Somit haben zwei Curven $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ und $x=\varphi(t)$, $y=\overline{\psi}(t)$ dann und nur dann ein „Element $m$ter Ordnung" gemeinsam, wenn sie eine Berührung $m$ter Ordnung mit einander eingehen, wo nach (27)

$$D^\mu\varphi(u)=D^\mu\overline{\varphi}(v), \quad D^\mu\psi(u)=D^\mu\overline{\psi}(v) \quad (\mu=0, 1, \ldots m).$$

Nun definiert (36) und in anderer Form (37) für jeden Wert von $\varkappa$ eine gewisse „Umgebung" des Elementes $(\varphi^{(\mu)}(\varkappa), \psi^{(\mu)}(\varkappa))_m$ und daher für variable $\varkappa$ zwischen t_1 und t_2 eine „Nachbarschaft $m$ter Ordnung" des Curvenstückes a. Solche „Umgebungen" und solche „Nachbarschaften" sind, wie leicht zu zeigen ist, continuierliche Bereiche in der $m+2$fachen Mannigfaltigkeit der Curvenelemente, nämlich Gesamtheiten von der Beschaffenheit, dass jedes ihrer im Inneren gelegenen Elemente stets in eine solche (nicht unendlich kleine) Umgebung eingeschlossen werden kann, welche selbst wieder ganz der Gesamtheit angehört. Eine nach den Definitionen (36) und (37) zu a „benachbarte Curve" $\bar{a}$ ist also eine solche, deren sämtliche Elemente einem solchen Nachbarschaftsbereiche von a angehören, jedes nämlich immer einer gewissen „Umgebung" eines Elementes von a.

„Begrenzt" werden solche „Bereiche" oder „Gebiete $m$ter Ordnung" nach (36) mit Hilfe von (24) und (25) durch Gebilde von höchstens $m$ter Ordnung, nämlich durch Gleichungen der Form:

$$\Phi(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})_m = \Phi_1(x, y; \alpha_\mu)_m = \Phi_2\left(x, y, \frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right)_m = 0,$$

also durch Differentialgleichungen $m$ter Ordnung, deren Integrale in Gestalt von $m$fach unendlichen Curvenscharen eine geometrische Veranschaulichung der „Gebiete" ermöglichen und der im Anfang

erwähnten „Begrenzungscurve“ C eines Flächenstreifens entsprechen. Doch soll auf diese Betrachtungen vorläufig nicht weiter eingegangen, sondern zur eigentlichen Aufgabe der Variationsrechnung zurückgekehrt werden.

Es sei nur noch bemerkt, dass die hier gegebene Definition der Nachbarschaft am nächsten kommt der Scheeffer'schen („Über die Bedeutung der Begriffe: Maximum und Minimum in der Variationsrechnung“, Math. Ann. XXVI), in welche sie übergeht, wenn in (37) $\lambda = \varkappa = x = t$ und $m = n$ angenommen wird. Dann reducieren sich nämlich diese Bedingungen auf die folgenden:

$$|\bar{\psi}^{(\mu)}(x) - \psi^{(\mu)}(x)| < g_\mu \qquad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots n),$$

wo durch $y = \psi(x)$ und $y = \bar{\psi}(x)$ die Curven a und $\bar{a}$ dargestellt werden.

Untersuchung der ersten Variation.

Zu den Curven $\bar{a}$, für welche im Fall, dass a ein Minimum liefert, $J(\bar{a}) > J(a)$ sein muss, gehören alle Curven der Form:

$$\begin{aligned} x &= \bar{\varphi}(t) = \varphi(t) + \varepsilon\,\xi(t) \\ y &= \bar{\psi}(t) = \psi(t) + \varepsilon\,\eta(t) \end{aligned} \tag{38}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. An den Grenzen soll

$$\xi^{(\mu)}(t_1) = 0, \quad \eta^{(\mu)}(t_1) = 0; \quad \xi^{(\mu)}(t_2) = 0, \quad \eta^{(\mu)}(t_2) = 0 \tag{39}$$
$$(\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1),$$

wodurch auch für $\bar{\varphi}(t)$, $\bar{\psi}(t)$ die Bedingungen (32) befriedigt werden.

2. Im ganzen Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ sollen $\xi(t)$ und $\eta(t)$, mithin auch $\bar{\varphi}(t)$ und $\bar{\psi}(t)$ den Stetigkeitsbedingungen (33) und (34) genügen.

Ausserdem soll $|\varepsilon|$ so klein gewählt werden, dass für $t_1 \leq t \leq t_2$ gemäss (35)

3. $\quad (\varphi'(t) + \varepsilon\,\xi'(t))^2 + (\psi'(t) + \varepsilon\,\eta'(t))^2 > \gamma' > 0,$

was, da schon a (35) genügt:

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > \gamma^2 > 0$$

und immer $\varepsilon^2(\xi'^2(t) + \eta'^2(t)) \geq 0$ ist, sicher erreicht werden kann durch:

$$(\varphi'^2(t) + \psi'^2(t))^2 + 2\varepsilon(\varphi'(t)\xi'(t) + \psi'(t)\eta'(t))$$

$$> \gamma^2 - 2|\varepsilon|h = \gamma' > 0, \quad \text{also} \quad |\varepsilon| < \frac{\gamma^2}{2h},$$

wenn $|\varphi'(t)\xi'(t) + \psi'(t)\eta'(t)| \leqq h$ angenommen wird.

Endlich soll, damit $\bar{a}$ auch zu den „benachbarten Curven" von a gehört, gleichfalls für das ganze Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$:

4. $$|\varepsilon \xi^{(\mu)}(t)| < g_\mu, \qquad |\varepsilon \eta^{(\mu)}(t)| < g_\mu$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots m),$$

wodurch (37) sicher befriedigt wird mit

$$\lambda = \varkappa = t, \qquad \lambda^{(\mu)} = e_{\mu,1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Dazu aber braucht nur:

$$|\varepsilon| \leqq \frac{g_\mu}{h_\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots m)$$

angenommen zu werden, wenn

$$|\xi^{(\mu)}(t)| < h_\mu, \qquad |\eta^{(\mu)}(t)| < h_\mu \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2; \quad \mu = 0, 1, \ldots m)$$

ihrer Endlichkeit wegen vorausgesetzt werden, während gleichzeitig die g_μ immer beliebig klein vorgeschrieben sein dürfen.

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$F(\varphi^{(\mu)}(t), \psi^{(\mu)}(t) = F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) = F$$

und

$$F(\varphi^{(\mu)}(t) + \varepsilon\xi^{(\mu)}(t), \psi^{(\mu)}(t) + \varepsilon\eta^{(\mu)}(t))$$

$$= F(x^{(\mu)} + \varepsilon\xi^{(\mu)}, y^{(\mu)} + \varepsilon\eta^{(\mu)}) = F_\varepsilon,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = J, \qquad \int_{t_1}^{t_2} F_\varepsilon\,dt = J_\varepsilon,$$

so kann man nach den über F gemachten Voraussetzungen für hinreichend kleine Werte von ε nach Potenzen von ε entwickeln:

$$(40) \qquad F_\varepsilon = F + \varepsilon\,\delta F + (\varepsilon)_2, \quad J_\varepsilon = J + \varepsilon\,\delta J + (\varepsilon)_2$$

und für $|\delta J| > 0$

$$J_\varepsilon - J = \Delta_\varepsilon J = \varepsilon\,\delta J \left(1 + \frac{(\varepsilon)}{\delta J}\right),$$

wo der letzte Factor für hinreichend kleine $|\varepsilon|$ immer positiv, das Produkt also durch Wahl des Vorzeichens von ε beliebig auch negativ gemacht werden kann, sodass hier ein Minimum für a sicherlich nicht eintritt. Also:

Satz I. *Wenn einem der Gesamtheit A angehörenden Curvenstück a ein Minimum des Integrales J entsprechen soll, so muss vor allen Dingen die „erste Variation“ δJ für a immer verschwinden für beliebige den Bedingungen 1. und 2. genügende Functionen $\xi(t)$, $\eta(t)$.*

Es ist aber:

$$(41) \qquad \delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta F\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mu=0}^{n} \left(X_\mu\,\xi^{(\mu)} + Y_\mu\,\eta^{(\mu)}\right) dt,$$

wenn, ebenso wie im ersten Abschnitte,

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(\mu)}} = X_\mu, \qquad \frac{\partial F}{\partial y^{(\mu)}} = Y_\mu, \qquad \varphi^{(\mu)}(t) = x^{(\mu)}, \qquad \psi^{(\mu)}(t) = y^{(\mu)}$$

gesetzt wird. Nun lässt sich die schon in (7a), dort freilich für $\xi = x'\,\tau$, $\eta = y'\,\tau$, angegebene Umformung:

$$(42) \qquad \delta F = P\,\xi + Q\,\eta + D \sum_{\mu=1}^{n} \left(P_\mu\,\xi^{(\mu-1)} + Q_\mu\,\eta^{(\mu-1)}\right)$$

$$\left(P_\mu = \sum_{i=0}^{n-\mu} (-1)^i D^i X_{\mu+i}, \qquad Q_\mu = \sum_{i=0}^{n-\mu} (-1)^i D^i Y_{\mu+i}\right)$$

nur ausführen für solche Werte von t, für welche die P_μ, Q_μ, also die Ableitungen $x^{(n+1)}, \ldots x^{(2n)}$; $y^{(n+1)}, \ldots y^{(2n)}$ sämtlich existieren, was für $r < 2n$ in (33) und (34) noch nicht enthalten ist; ja, wir müssen sie als stetige Functionen von t in einem gewissen Intervalle voraussetzen, um den bekannten Schluss der Variationsrechnung machen zu können, dass P und Q überall verschwinden müssen. Dann aber lässt sich unter den allgemeinsten Voraussetzungen streng beweisen:

Satz II. *Existieren P und Q in irgend einem Teil-Intervall $t' \ldots t''$ als stetige Functionen von t, so müssen sie für den Fall eines Minimums im ganzen Intervall überall verschwinden.*

Ist also $t_1 \leqq t' < t_0 < t'' \leqq t_2$, so wird behauptet, dass unter den gemachten Voraussetzungen $P(t_0) = 0$ sein muss.

Angenommen, es wäre z. B. $P(t_0) > p > 0$ positiv, so liesse sich der Stetigkeit von P wegen eine positive Grösse α so klein annehmen, dass

$$| P(t) - P(t_0) | < P(t_0) - p \qquad \text{für } | t - t_0 | < \alpha,$$

so dass:

$$P(t) = P(t_0) + P(t) - P(t_0) \geq P(t_0) - | P(t) - P(t_0) |$$
$$> P(t_0) - (P(t_0) - p) = p,$$

also:

$$P(t) > p > 0 \tag{43}$$

ist im ganzen Intervall $t_0 - \alpha \ldots t_0 + \alpha$.

In diesem wie in dem grösseren $t' \ldots t''$ sind aber mit P, Q auch die übrigen P_μ, Q_μ stetige Functionen von t und daher die Umformung (42) gestattet, so dass

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta F \, dt = \left(\int_{t_1}^{t_0 - \alpha} \delta F \, dt + \int_{t_0 + \alpha}^{t_2} \delta F \, dt \right) \tag{44}$$
$$+ \left[\sum_{\mu=1}^{n} \left(P_\mu \xi^{(\mu-1)} + Q_\mu \eta^{(\mu-1)} \right) \right]_{t_0 - \alpha}^{t_0 + \alpha}$$
$$+ \int_{t_0 - \alpha}^{t_0 + \alpha} (P \xi + Q \eta) \, dt = \delta J_1 + \delta J_2 + \delta J_0.$$

Jetzt brauchen wir nur zu setzen:

$$\xi(t) = 0 \qquad (t_1 \leqq t < t_0 - \alpha, \quad t_0 + \alpha < t \leqq t_2)$$

$$= (t - t_0 + \alpha)^{r'+1} (t_0 + \alpha - t)^{r'+1} > 0$$

$$(t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha)$$

$$\eta(t) = 0 \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2),$$

wo $r' \geqq r$ und gleichzeitig $r' \geqq n - 1$ eine beliebig grosse positive ganze Zahl sein kann. Dann sind wegen:

$$\xi^{(\mu)}(t_0 \pm \alpha) = 0 \qquad (0 \leqq \mu \leqq r')$$

ξ und η mit ihren Ableitungen bis zur $r$ten Ordnung im ganzen Intervall stetige Functionen von t (gemäss (33) und (34)) und genügen den Grenzbedingungen (39), müssen also nach Satz I die erste Variation zum Verschwinden bringen, während doch in (44)

$$\delta J_1 = 0, \quad \delta J_2 = 0,$$

also nach (43)

$$\delta J = \delta J_0 = \int_{t_0 - \alpha}^{t_0 + \alpha} P \xi \, dt > 0$$

wird, so dass die Annahme $P(t_0) > 0$ und ebenso, wie analog gezeigt wird, die anderen $P(t_0) < 0$ und $Q(t_0) \gtrless 0$ für ein Minimum unmöglich sind.

Wir können den Beweis auch führen, wenn wir nur solche Variationen zulassen, bei denen ξ, η im ganzen Intervall $t_1 \ldots t_2$ mit allen Ableitungen stetig und durch eine einzige analytische Formel ausgedrückt sind.

Setzen wir nämlich, einer zuerst von Herrn Prof. Weierstrass gegebenen Anregung folgend, wenn ϱ eine von t unabhängige, später zu bestimmende positive Grösse bedeutet,

$$\xi(t) = (t - t_1)^n (t_2 - t)^n e^{-\varrho^2 (t - t_0)^2} \geq 0$$

$$\eta(t) = 0$$

für

$$t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

wodurch allen Forderungen genügt wird, da auch

$$(39) \qquad \xi^{(\mu)}(t_1) = \xi^{(\mu)}(t_2) = 0 \qquad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1),$$

so sind die successiven Ableitungen von der Form:

$$\xi^{(\mu)}(t) = \xi_\mu(t;\ \varrho^2)\ e^{-\varrho^2(t-t_0)^2},$$

wo die ξ_μ ganze rationale Functionen ihrer beiden Argumente bedeuten.

In den Intervallen $t_1 \ldots t_0 - \alpha$ und $t_0 + \alpha \ldots t_2$ ist nun überall:

$$e^{-\varrho^2(t-t_0)^2} \leqq e^{-\alpha^2\varrho^2} \quad \text{wegen} \quad |t - t_0| \geqq \alpha,$$

also:

$$|\delta F| \leqq e^{-\alpha^2\varrho^2} \sum_{\mu=0}^{n} |X_\mu(t)\, \xi_\mu(t,\ \varrho^2)| \leqq g_1(\varrho^2)\ e^{-\alpha^2\varrho^2},$$

wo $g_1(\varrho^2)$ die ganze Function von ϱ^2 mit positiven Coefficienten bezeichnet, die man erhält, wenn man in der Summe alle Coefficienten der Potenzen von ϱ^2 durch ihre grössten Beträge im Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$ ersetzt.

Es wird demnach in (44)

$$\delta J_1 | \leqq \int_{t_1}^{t_0-\alpha} |\delta F|\, dt + \int_{t_0+\alpha}^{t_2} |\delta F|\, dt < (t_2 - t_1)\, g_1(\varrho^2)\ e^{-\alpha^2\varrho^2}$$

und ganz ebenso:

$$|\delta J_2| = e^{-\alpha^2\varrho^2} \left| \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu\, \xi_{\mu-1}(t,\ \varrho^2) \right]_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} \right| \leqq g_2(\varrho^2)\ e^{-\alpha^2\varrho^2}$$

und

$$\delta J_1 + \delta J_2 | < \left((t_2 - t_1)\, g_1(\varrho^2) + g_2(\varrho^2)\right) e^{-\alpha^2\varrho^2} = g(\varrho^2)\, e^{-\alpha^2\varrho^2}.$$

Im Intervall $t_0 - \alpha \ldots t_0 + \alpha$ aber besitzt:

$$\xi_0(t) = (t - t_1)^n\, (t_2 - t)^n$$

eine positive untere Grenze q, so dass wegen (43) $(P > p)$

$$\delta J_0 = \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} P\,\xi\,dt > p\,q \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} e^{-\varrho^2 (t-t_0)^2}\,dt$$

$$> \frac{p\,q}{\varrho} \int_{-\alpha\varrho}^{\alpha\varrho} e^{-z^2}\,dz = \frac{p\,q}{\varrho}\,(\sqrt{\pi} - \varkappa) > 0,$$

wo wegen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}$$

$\varkappa$ für jedes vorgeschriebene α durch Wahl eines hinreichend grossen ϱ beliebig klein gemacht werden kann.

Jetzt kann endlich die Beziehung:

$$\left| \frac{\delta J_1 + \delta J_2}{\delta J_0} \right| < \frac{\varrho\, g\,(\varrho^2)\, e^{-\alpha^2 \varrho^2}}{p\,q\,(\sqrt{\pi} - \varkappa)} < 1$$

durch Vergrösserung von ϱ sicher erreicht werden, da

$$\lim_{\varrho = \infty} \varrho\, g\,(\varrho^2)\, e^{-\varrho^2 \alpha^2} = 0$$

ist, und es wird schliesslich nach (44)

$$\delta J = \delta J_0 \left(1 + \frac{\delta J_1 + \delta J_2}{\delta J_0}\right) > 0,$$

während doch $\delta J = 0$ sein sollte, womit der Beweis des Satzes II vollendet ist.

Die beiden Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ hängen zusammen durch (15):

$$P\,x' + Q\,y' = 0.$$

Setzt man daher $P\,y' - Q\,x' = G$, so folgt:

(45) $\quad P\,(x'^2 + y'^2) = y'\,G, \qquad Q\,(x'^2 + y'^2) = -\,x'\,G;$

es werden also, da x' und y' nach (35) nicht gleichzeitig verschwinden sollen, die beiden Differentialgleichungen der Ordnung $2n$ ersetzt durch eine einzige: $G = 0$, die wir als „die Differentialgleichung des Problems“ bezeichnen wollen.

Setzt man nun:

$$(46)\qquad \begin{cases} x'\,\xi + y'\,\eta = (x'^2 + y'^2)\,v, & \xi = x'\,v + y'\,w, \\ y'\,\xi - x'\,\eta = (x'^2 + y'^2)\,w, & \eta = y'\,v - x'\,w, \end{cases}$$

so wird

$$(47)\quad P\,\xi + Q\,\eta = (P\,x' + Q\,y')\,v + (P\,y' - Q\,x')\,w = G\,w,$$

und daher, wenn in (42) der integrierte Teil nur angedeutet wird:

$$\delta J = \Big[\ \Big]_{t'}^{t''} + \int_{t'}^{t''} G\,w\,dt$$

für jedes Intervall $t' \ldots t''$, für welches die Umformung (42) gestattet ist.

Stetigkeits-Bedingungen.

Was Herr Weierstrass für das Integral:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y;\ x', y')\,dt$$

von den Functionen $\dfrac{\partial F}{\partial x'}$ und $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ bewiesen hat, ähnlich wie P. du Bois-Reymond (Math. Annalen XV) und Todhunter (Researches on the Calculus of Variations) von analogen Functionen in der gewöhnlichen Darstellung, lässt sich folgendermassen verallgemeinern:

Satz III. *Für ein Curvenstück a, das den Bedingungen (32) bis (35) der A genügt und das ein Minimum des Integrales liefern, oder allgemeiner, dessen erste Variation in der oben angegebenen Weise verschwinden soll, dürfen die Grössen* P_1, $P_2 \ldots P_n = X_n$; Q_1, Q_2, $\ldots Q_n = Y_n$, *als Functionen von t betrachtet, an einer Stelle* t_0 *keine endlichen Sprünge erleiden, wenn zu beiden Seiten von* t_0 *in einer beliebig kleinen Umgebung* $t' \ldots t''$ *die Functionen* $x, x', \ldots x^{(2n)}$; $y, y', \ldots y^{(2n)}$ *und damit auch P, Q stetig sind.*

Um diesen Satz für eine dieser Grössen P_λ zu erweisen, nehmen wir eine Variation ξ, η von der Beschaffenheit, dass

$$\eta(t) = 0 \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

$$\xi(t) = 0 \qquad (t_1 \leqq t \leqq t',\ t'' \leqq t \leqq t_2),$$

$$\xi^{(\mu-1)}(t') = \xi^{(\mu-1)}(t'') = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots r'+1 \geqq n) \tag{48}$$

$$\xi^{(\mu-1)}(t_0) = e_{\mu,\lambda} = \begin{cases} 1 & (\mu = \lambda) \\ 0 & (\mu \gtrless \lambda) \end{cases} \quad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

und $\xi(t)$ auch im Intervall $t' \ldots t''$ mit seinen Ableitungen bis zur r'ten Ordnung stetig ist.

Dann ist:

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta F\, dt = \int_{t'}^{t_0} + \int_{t_0}^{t''}$$

$$= \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu\, \xi^{(\mu-1)} \right]_{t'}^{t_0-0} + \int_{t'}^{t_0-0} G\, w\, dt$$

$$+ \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu\, \xi^{(\mu-1)} \right]_{t_0+0}^{t''} + \int_{t_0+0}^{t''} G\, w\, dt,$$

also wegen $G = 0$ in den beiden Intervallen $t' \ldots t_0 - 0$ und $t_0 + 0 \ldots t''$ (Satz II) und wegen (48):

$$\delta J = \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu\, \xi^{(\mu-1)} \right]_{t_0+0}^{t_0-0} = P_\lambda(t_0-0) - P_\lambda(t_0+0),$$

und da nach Satz I $\delta J = 0$ sein muss:

$$P_\lambda(t_0-0) = P_\lambda(t_0+0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n),$$

q. e. d.

Doch wurde bei diesem Beweise vorausgesetzt, dass P_λ auf beiden Seiten von t_0 nach bestimmten Grenzwerten $P_\lambda(t_0 \mp 0)$ convergiert, was z. B. für die Function $\sin \frac{1}{t}$ an ihrer einzigen Unstetigkeitsstelle $t = 0$ nicht stattfindet; ferner wurde eine Variation

$\xi(t)$ benutzt, deren höhere Ableitungen an den Stellen t', t'' unstetig sind, und es fehlte schliesslich noch der Beweis für die Existenz einer Function $\xi(t)$ mit den angenommenen Eigenschaften im Intervall $t' \leqq t \leqq t''$. Jetzt soll der Beweis von allen diesen Bedenken befreit werden durch Benutzung ganz ähnlicher Hilfsmittel wie der zum Beweise des vorigen Satzes II angewendeten.

Es seien α, β beliebig kleine positive Grössen,

$$t_1 \leq t' < t_0 - \alpha < t_0 < t_0 + \beta < t'' \leq t_2$$

und es werde vorausgesetzt, dass in den beiden Intervallen $t' \ldots t_0 - \alpha$ und $t_0 + \beta \ldots t''$, wie klein auch α und β genommen werden, P und Q stetig verlaufen, also nach Satz II beständig verschwinden, dann kann, so wird behauptet, für α, β eine obere Grenze α_0 so angegeben werden, dass

$$|P_\lambda(t_0+\beta) - P_\lambda(t_0-\alpha)| < \varepsilon \tag{49}$$

für ein beliebig klein vorgeschriebenes ε unter der Voraussetzung des Verschwindens der ersten Variation.

Wir betrachten dazu die folgende jedenfalls erlaubte Variation:

$$\eta = 0$$
$$\xi = \xi(t;\varrho) = \xi_0(t,\varrho)\, e^{-\varrho(t-t_0)^2} \qquad (\varrho > 0),$$

wo $\xi_0(t,\varrho)$ eine ganze rationale Function von t und ϱ sein soll und so beschaffen, dass

$$\begin{aligned} \xi^{(\mu-1)}(t_1) &= \xi^{(\mu-1)}(t_2) = 0, \\ \xi^{(\mu-1)}(t') &= \xi^{(\mu-1)}(t'') = 0, \\ \xi^{(\mu-1)}(t_0) &= e_{\mu,\lambda} \quad (\mu = 1, 2, \ldots n). \end{aligned} \tag{50}$$

Den ersten Bedingungen wird genügt durch den Ansatz:

$$\begin{aligned} \xi_0(t,\varrho) &= (t-t_1)^n (t_2-t)^n (t-t')^n (t''-t)^n \varphi(t,\varrho) \\ &= h(t)\,\varphi(t,\varrho), \end{aligned}$$

und es bleibt nur noch die ganze Function $\varphi(t,\varrho)$ so zu bestimmen, dass auch die letzte Bedingung befriedigt wird, nämlich

$$e_{\mu,\lambda} = D^{\mu-1}\left[h(t)\,\varphi(t,\varrho)e^{-\varrho(t-t_0)^2}\right], \qquad (t=t_0)$$

$$= \sum_{i=0}^{\mu-1}\binom{\mu-1}{i}\varphi^{(i)}(t,\varrho)\,D^{\mu-i-1}\left[h(t)\,e^{-\varrho(t-t_0)^2}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\mu-1}\binom{\mu-1}{i}\varphi^{(i)}(t_0,\varrho)\,h_{\mu-i-1}(t_0,\varrho),$$

wenn

$$D^i\left[h(t)\,e^{-\varrho(t-t_0)^2}\right] = h_i(t,\varrho)\,e^{-\varrho(t-t_0)^2}$$

gesetzt wird, wo auch h_i eine ganze Function ist und der Exponentialfactor für $t=t_0$ sich auf 1 reduciert.

Nun lassen sich die vorliegenden Gleichungen für $\mu = 1, 2 \ldots n$ successive auflösen nach den Unbekannten

$$\varphi(t_0,\varrho), \quad \varphi'(t_0,\varrho) = \left[\frac{\partial\varphi(t,\varrho)}{\partial t}\right]_{t=t_0}, \ \ldots \ \varphi^{(n-1)}(t_0,\varrho),$$

da immer die höchste Ableitung $\varphi^{(\mu-1)}(t_0,\varrho)$ den Coefficienten $h_0(t,\varrho) = h(t_0) > 0$ besitzt. So ergeben sich diese Grössen $\varphi^{(\mu-1)}(t_0,\varrho)$ sämtlich als ganze Functionen von ϱ, und man braucht nur noch

$$\varphi(t,\varrho) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(t_0,\varrho)(t-t_0)^i$$

zu setzen, um eine Function

$$\xi(t) = h(t)\,\varphi(t,\varrho)\,e^{-\varrho(t-t_0)^2} = \xi_0(t,\varrho)\,e^{-\varrho(t-t_0)^2}$$

zu erhalten, die in der That allen Bedingungen (50) genügt und deren Ableitungen von der Form sind:

$$\xi^{(\mu)}(t) = \xi_\mu(t,\varrho)\,e^{-\varrho(t-t_0)^2}.$$

Ganz dieselbe Methode unter der vereinfachenden Annahme $\varrho = 0$ liesse sich anwenden zur Bildung der vorhin benutzten Function $\xi(t)$ mit den Eigenschaften (48).

Für unsere Variation $\delta x = \xi(t, \varrho)$, $\delta y = 0$ wird nun:

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \delta F\, dt \\ &= \left(\int_{t_1}^{t'} + \int_{t''}^{t_2} \right) + \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\beta} + \left(\int_{t'}^{t_0-\alpha} + \int_{t_0+\beta}^{t''} \right) \\ &= \quad \delta J_1 \quad + \quad \delta J_2 \quad + \quad \delta J_3. \end{aligned} \right.$$

Ähnlich wie beim Beweise von II lässt sich jetzt eine ganze rationale Function $g(\varrho)$ so angeben, dass für das ganze Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$

$$|\delta F| = \left| \sum_{\mu=0}^{n} X_\mu \xi^{(\mu)} \right| = e^{-\varrho(t-t_0)^2} \left| \sum_{\mu=0}^{n} X_\mu(t)\, \xi_\mu(t, \varrho) \right|$$

$$(52)\qquad < e^{-\varrho(t-t_0)^2}\, g(\varrho)$$

wird, da nach unserer Annahme die X_μ auch an der Unstetigkeitsstelle endlich bleiben sollen. Für $(t-t_0)^2 \geqq \tau^2$, also in den Intervallen $t_1 \ldots t'$ und $t'' \ldots t_2$, wenn τ die kleinere der Differenzen $t_0 - t'$ und $t'' - t_0$ bezeichnet, wird daher:

$$|\delta F| < e^{-\varrho\tau^2}\, g(\varrho)$$

und

$$(53)\qquad |\delta J_1| = \left| \int_{t_1}^{t'} + \int_{t''}^{t_2} \right| < (t_2 - t_1)\, g(\varrho)\, e^{-\varrho\tau^2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

für ein beliebig kleines ε, wenn bei vorgeschriebenem τ der Parameter ϱ hinreichend gross genommen wird.

Ferner wird für $t_0 - \alpha < t < t_0 + \beta$:

$$|\delta F| < e^{-\varrho(t-t_0)^2}\, g(\varrho) \leqq g(\varrho)$$

wegen $\varrho > 0$, und daher kann auch für das eben bestimmte ϱ noch der zweite Teil in (51)

$$(54)\qquad |\delta J_2| = \left| \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\beta} \delta F\, dt \right| < g(\varrho)\,(\alpha + \beta) < 2\,\alpha_0\, g(\varrho) < \frac{\varepsilon}{3}$$

gemacht werden durch hinreichend klein gewähltes α_0 und

$$\alpha < \alpha_0, \quad \beta < \alpha_0.$$

In den Intervallen $t' \ldots t_0 - \alpha$ und $t_0 + \beta \ldots t''$ endlich sind nach der Annahme alle P_μ stetige Functionen von t und daher ist die Formel (42) anwendbar, so dass

$$\delta J_3 = \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu \, \xi^{(\mu-1)} \right]_{t'}^{t_0-\alpha} + \int_{t'}^{t_0-\alpha} P \, \xi \, dt$$

$$+ \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu \, \xi^{(\mu-1)} \right]_{t_0+\beta}^{t''} + \int_{t_0+\beta}^{t''} P \, \xi \, dt,$$

oder, wegen $P = 0$, da sonst nach II gewiss kein Minimum stattfinden könnte, mit Hilfe von (50)

$$\delta J_3 = \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu \, \xi^{(\mu-1)} \right]_{t_0+\beta}^{t_0-\alpha}$$

und

$$\delta J_3 = P_\lambda(t_0 - \alpha) - P_\lambda(t_0 + \beta) + \psi(\varrho, \alpha, \beta), \tag{55}$$

wo

$$\psi(\varrho, \alpha, \beta) = \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu \left(\xi^{(\mu-1)} - e_{\mu,\lambda} \right) \right]_{t_0+\beta}^{t_0-\alpha},$$

wegen (50)

$$\lim_{\alpha=0} \xi^{(\mu-1)}(t_0 - \alpha) = \lim_{\beta=0} \xi^{(\mu-1)}(t_0 + \beta) = \xi^{(\mu-1)}(t_0) = e_{\mu,\lambda},$$

und weil auch die P_μ bei der Annäherung an t_0 nicht über alle Grenzen wachsen sollen, durch Verkleinerung von α und β dem Betrage nach beliebig klein gemacht werden kann, also auch

$$|\psi(\varrho, \alpha, \beta)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{56}$$

Nun soll aber: $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 + \delta J_3 = 0$ sein (51) auch für die hier betrachtete Variation ξ, also nach (55)

$$| P_\lambda(t_0 + \beta) - P_\lambda(t_0 - \alpha) | \leq | \delta J_1 | + | \delta J_2 | + | \psi(\varrho, \alpha, \beta) |$$

und nach (53), (54), (56) $$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

wie in (49) behauptet, wenn für ein beliebig klein vorgeschriebenes ε die obere Grenze α_0 von α und β hinreichend klein genommen wird.

Die Gültigkeit dieses jetzt vollständig bewiesenen Satzes III stützt sich jedoch auf die Voraussetzung, dass gemäss (34) (vergl. die dort gemachte Bemerkung) die $x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t)$, $y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t)$ $(\mu = 0, 1, \ldots r)$ selbst im ganzen betrachteten Intervall von a überall stetig verlaufen, nicht nur ihre Osculations-Invarianten. Im anderen Falle würden die dem Beweise zu Grunde gelegten Variationen oft nicht mehr zu den „erlaubten“ gehören, und es wären nicht mehr die P_μ, Q_μ, sondern andere Functionen, deren ausnahmslose Stetigkeit behauptet werden könnte. Solche Ausdrücke aber erhält man z. B., wenn man für t die Bogenlänge s von a oder allgemeiner eine mit ihren r ersten Ableitungen stetige Function von s als unabhängige Variable einführt und demgemäss in den P_μ, Q_μ die Argumente $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ durch die $\frac{d^\mu x}{ds^\mu}$, $\frac{d^\mu y}{ds^\mu}$ ersetzt, die sich ihrerseits wieder durch die α_μ und auch durch die $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ ausdrücken lassen. Doch soll hierauf jetzt nicht näher eingegangen werden.

Bisher war die Anzahl r der ersten Ableitungen $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, deren Stetigkeit in (34) für alle Curven A gefordert wurde, noch unbestimmt gelassen worden und die Sätze I, II, III für beliebiges r abgeleitet. Es wird jetzt aber gezeigt werden, dass

$$r \geq n - 1$$

angenommen werden muss, wenn in allgemeineren Fällen ein Minimum überhaupt möglich sein soll.

Satz IV. *Für jedes Integral $J = \int F\,dt$ und jedes Curvenstück a lässt sich immer eine solche Variation ξ, η angeben, deren λte Ableitungen $\xi^{(\lambda)}$, $\eta^{(\lambda)}$ $(\lambda \leq n - 1)$ an einer einzigen Stelle $t = t_0$ endliche Sprünge erleiden dürfen, und welche der ersten Variation*

einen von 0 verschiedenen Wert erteilt und damit ein Minimum unmöglich macht, vorausgesetzt, dass nicht in der ganzen Ausdehnung von a die Functionen P und Q unstetig oder P_λ und Q_λ immer $= 0$ sind.

Der Beweis kann auf den Fall beschränkt werden, wo die Forderungen der Sätze II und III erfüllt sind, da sonst die Unmöglichkeit eines Minimums schon feststände.

In einem Teil-Intervall $t' \ldots t''$, in welchem P und Q stetig sind, nach II also überall verschwinden, werde t_0 so gewählt, dass $P_\lambda \gtrless 0$ ist, und folgende Variation betrachtet:

$$\begin{aligned} \eta &= 0 && (t' < t \leqq t'') \\ \xi &= \xi_1(t) = (t - t')^n \varphi_1(t) && (t' \leqq t < t_0) \\ &= \xi_2(t) = (t'' - t)^n \varphi_2(t) && (t_0 < t < t''), \end{aligned}$$

wo $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ ganze Functionen sind und so beschaffen, dass ausser

$$\xi_1^{(\mu-1)}(t') = \xi_2^{(\mu-1)}(t'') = 0 \tag{57}$$

noch

$$\xi_1^{(\mu-1)}(t_0) - \xi_2^{(\mu-1)}(t_0) = \xi^{(\mu-1)}(t_0 - 0) - \xi^{(\mu-1)}(t_0 + 0) = e_{\mu,\lambda} \tag{58}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots n),$$

was immer angenommen werden darf, da nach dem für (50) angewandten Verfahren den $\xi_1^{(\mu-1)}(t_0)$ und $\xi_2^{(\mu-1)}(t_0)$ beliebige Werte vorgeschrieben werden können.

Dann wird:

$$\delta J = \int_{t'}^{t_0 - 0} \delta F \, dt + \int_{t_0 + 0}^{t''} \delta F \, dt$$

$$= \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu \xi_1^{(\mu-1)} \right]_{t'}^{t_0 - 0} + \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu \xi_2^{(\mu-1)} \right]_{t_0 + 0}^{t''},$$

während die Integrale $\int P \xi \, dt$ wegen $P = 0$ verschwinden. Nach (57) und (58) mit Rücksicht auf die Stetigkeit der P_μ, die nach III auch für Unstetigkeitsstellen bestehen bleiben muss, wird dies aber

$$\delta J = \left[\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu \xi^{(\mu-1)} \right]_{t_0+0}^{t_0-0}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} P_\mu(t_0) \left(\xi^{(\mu-1)}(t_0 - 0) - \xi^{(\mu-1)}(t_0 + 0) \right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} P_\mu(t_0)\, e_{\mu,\lambda} = P_\lambda(t_0) \gtrless 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Der Beweis liesse sich noch verschärfen durch Anwendung des für III benutzten umständlicheren Verfahrens, was aber hier ohne Interesse wäre.

Auf Grund dieses Satzes IV wird im Folgenden von allen „erlaubten" Curven die durchgängige Stetigkeit der Ableitungen $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ bis zur $\mu = r = n-1$ten Ordnung immer vorausgesetzt werden. Berücksichtigt man aber auch hier wieder die Willkürlichkeit der „Darstellung", die von Teil zu Teil wechseln kann, so brauchen thatsächlich nur die Osculations-Invarianten $n-1$ter Ordnung immer stetig zu sein; die einzelnen Teile müssen einander immer von mindestens $n-1$ ter Ordnung berühren.

Die Untersuchung der „ersten Variation", die zu den Sätzen I bis IV führte, wird in den meisten Fällen zur Auffindung der Curven genügen, die unter den vorgeschriebenen Bedingungen für ein Minimum überhaupt in Betracht kommen. Nach Satz II müssen sie im allgemeinen der „Differentialgleichung des Problems" $G = 0$ genügen, die von der Ordnung $2n$ ist und ein allgemeines Integral besitzt von der Form:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t; u_1, u_2, \ldots u_{2n}) = \varphi(t, u) \\ y &= \psi(t; u_1, u_2, \ldots u_{2n}) = \psi(t, u), \end{aligned} \tag{59}$$

wo die u_ν $(\nu = 1, 2, \ldots 2n)$ willkürliche Constanten sind und in ihrer Gesamtheit durch u angedeutet werden mögen, während

$$\frac{\partial^\mu \varphi(t, u)}{\partial t^\mu} = \varphi^{(\mu)}(t, u), \qquad \frac{\partial \varphi(t, u)}{\partial u_\nu} = \varphi_\nu(t, u)$$

u. s. w. gesetzt werde.

Wird F als analytische Function der $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ vorausgesetzt, so sind auch G und daher auch φ und ψ in Bezug auf ihre sämtlichen Argumente analytische Functionen.

Eine Curve a, die ein Minimum liefern soll, muss nach Satz II aus einer Anzahl particulärer Lösungen der Differentialgleichung zusammengesetzt sein, also von der Form (59), wo die u_ρ in den einzelnen Teilen constante Werte besitzen. An den Übergangsstellen aber, an denen die u_ρ endliche Sprünge erleiden können, müssen ausser den Bedingungen (34), wo nach IV $r = n - 1$ zu setzen ist, noch gemäss III die P_μ, Q_μ $(\mu = 1, 2, .. n)$ stetig bleiben.

Diesen Bedingungen zusammen mit den „Grenzbedingungen" (32) wird, wie aus der Anzahl der verfügbaren Constanten hervorgeht, im allgemeinen nur auf eine endliche Anzahl von Weisen genügt werden können, die nunmehr einzeln untersucht werden müssen.

Unser Problem hat sich also auf die Frage reduciert, ob ein vorgeschriebenes, den bisherigen Bedingungen genügendes Curvenstück a ein wirkliches Minimum des Integrales liefert. Dann müssten es notwendig auch seine einzelnen Teile, die ja auf Grund von (34) $(r = n - 1)$ unter festgehaltenen Osculations-Invarianten $n - 1$ ter Ordnung an den beiden Endpunkten, also unter den Grenzbedingungen (32), einzeln variiert werden können (der Fall $r > n - 1$ soll jetzt nicht mehr berücksichtigt werden), und erst wenn diese Eigenschaft von den einzelnen Teilen bewiesen ist, wird über die Zulässigkeit der Zusammensetzung entschieden werden können. Es kommt also alles an auf die Beantwortung der Frage:

Unter welchen Bedingungen entspricht einem von singulären Punkten freien Stück 1 2 einer particulären Lösung (59) der Differentialgleichung des Problems gemäss der aufgestellten Definition ein wirkliches Minimum des zwischen seinen Grenzen erstreckten Integrales?

Diese Aufgabe nach der Methode von Herrn Prof. Weierstrass zu lösen, soll in den folgenden Abschnitten versucht werden.

Dritter Abschnitt.

Einführung der Function *E*.

Es sei die Curve a

$$x = \varphi(t) = \varphi(t, a) = \varphi(t; a_1, \ldots a_{2n})$$

$$y = \psi(t) = \psi(t, a) = \psi(t; a_1, \ldots a_{2n})$$

nach (59) ein durch $u_\nu = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots 2n)$ charakterisiertes besonderes Integral der Differentialgleichung des Problems und möge sich im ganzen Intervall 1 2 $(t_1 \leq t \leq t_2)$ in der Weise regulär verhalten, dass $\varphi^{(\mu)}(t)$, $\psi^{(\mu)}(t)$, sowie auch $\varphi_\nu^{(\mu)}(t)$, $\psi_\nu^{(\mu)}(t)$ $(\mu, \nu = 0, 1, \ldots 2n)$ überall eindeutig, endlich und stetig sind, und dass ausserdem noch für $n > 1$ bei constantem γ beständig

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > \gamma^2 > 0. \tag{35}$$

Innerhalb dieses Intervalls werden zwei Punkte 0 und 3 angenommen, für welche t die Werte t_0 und t_3 besitzen möge, also

$$t_1 < t_0 < t_3 \leq t_2$$

und, ebenso wie von Herrn Prof. Weierstrass für den Fall $n = 1$, folgende Variation 043 des Curvenstückes 03 betrachtet: Durch $x = \bar{\varphi}(\lambda)$, $y = \bar{\psi}(\lambda)$ werde eine zweite Curve $\bar{a}$ gegeben, welche die erste a im Punkte 3 von $n-1$ter Ordnung berühren und sich in der Umgebung dieses Punktes ebenfalls bis zu den Ableitungen $n$ter Ordnung stetig verhalten soll. Dann lässt sich nach (30) eine mit beliebig vielen Ableitungen stetige Function $\lambda = \lambda(t)$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein solches System von Werten $\lambda^{(\mu)} = \lambda^{(\mu)}(t_3)$ $(\mu = 0, 1, \ldots n-1;\ \lambda' > 0)$ angeben, dass für $t = t_3$:

$$\begin{aligned} &\overline{x_3}^{(\mu)} = \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3) = D^\mu \overline{\varphi}(\lambda) = \varphi^{(\mu)}(t_3) = x_3^{(\mu)} \\ (60)\qquad &\overline{y_3}^{(\mu)} = \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3) = D^\mu \overline{\psi}(\lambda) = \psi^{(\mu)}(t_3) = y_3^{(\mu)} \\ &(\mu = 0, 1, \ldots n-1), \end{aligned}$$

wenn

$$(61)\qquad \overline{\varphi}(\lambda) = \varphi[\lambda(t)] = \overline{\varphi_1}(t),\ \overline{\psi}(\lambda) = \psi[\lambda(t)] = \psi_1(t)$$

gesetzt wird, wo auch die Functionen $\overline{\varphi_1}$, $\overline{\psi_1}$ sich in der Umgebung von $t = t_3$ regulär verhalten. Diese Functionen $\overline{\varphi_1}$, $\overline{\psi_1}$ und damit die Curve $\bar{a}$ können immer so angenommen werden, dass nicht nur die Bedingungen (60) erfüllt werden, sondern auch die in Bezug auf das Argument t genommenen Ableitungen:

$$(60\,\text{a})\qquad \overline{\varphi_1}^{(n)}(t_3) = \overline{x_3}^{(n)},\quad \overline{\psi_1}^{(n)}(t_3) = \overline{y_3}^{(n)}$$

beliebig vorgeschriebene, von $\varphi^{(n)}(t_3) = x_3^{(n)}$, $\psi^{(n)}(t_3) = y_3^{(n)}$ verschiedene Werte annehmen.

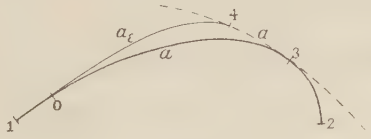

Fig. 2.

Nun werde in der Nähe von 3 auf der Curve $\bar{a}$ nach rückwärts ein Punkt 4 angenommen mit den Coordinaten:

$$\begin{aligned} &x = x_4 = \varphi_1(t_3 - \varepsilon) = \varphi[\lambda(t_3 - \varepsilon)] = \varphi(\lambda - \iota) \\ (62)\qquad &y = y_4 = \overline{\psi_1}(t_3 - \varepsilon) = \overline{\psi}[\lambda(t_3 - \varepsilon)] = \overline{\psi}(\lambda - \iota), \end{aligned}$$

wo

$$\iota = \lambda(t_3) - \lambda(t_3 - \varepsilon) = \lambda'(t_3)\,\varepsilon + (\varepsilon)_2 = \lambda'\,\varepsilon + (\varepsilon)_2,$$

und mit 0 durch eine solche Curve a_ε:

$$x = \varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t) + \varepsilon\,\varphi_\varepsilon(t) + (\varepsilon)_2,$$

$$y = \psi_\varepsilon(t) = \psi(t) + \varepsilon\,\overline{\psi}_\varepsilon(t) + (\varepsilon)_2$$

verbunden, welche a in 0 und $\bar{a}$ in 4 von $n-1$ter Ordnung berührt, während φ_ε und ψ_ε im ganzen Intervall 0 4 denselben Stetigkeitsbedingungen wie φ und ψ genügen und sich für unendlich

kleine ε auf diese Functionen selbst reducieren. Dann müssen nach (30) für passende Functionen $\vartheta_0(t)=t+\tau_0(t)$, $\vartheta_3(t)=t+\tau_3(t)$ und für die Stellen $t=t_0$, $t=t_3$ die Gleichungen bestehen:

$$(63)\quad \begin{aligned} D^\mu\varphi_\varepsilon(\vartheta_0) &= \varphi^{(\mu)}(t_0) & D^\mu\varphi_\varepsilon(\vartheta_3) &= \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3-\varepsilon)\\ D^\mu\psi_\varepsilon(\vartheta_0) &= \psi^{(\mu)}(t_0) & D^\mu\psi_\varepsilon(\vartheta_3) &= \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3-\varepsilon)\end{aligned}$$

$$(\mu=0,\,1,\,\ldots\,n-1).$$

Aus den ersten dieser Gleichungen (für $\mu=0$) ergeben sich bei hinreichend kleinem ε die Grössen ϑ_0 und ϑ_3 eindeutig und beliebig wenig verschieden von t_0 und t_3:

$$\vartheta_0=t_0+\tau_0=t_0+\varepsilon\,\overline{\tau_0}+(\varepsilon)_2,\quad \vartheta_3=t_3+\tau_3=t_3+\varepsilon\,\overline{\tau_3}+(\varepsilon)_2,$$

wenn nicht etwa die Curve a in 0 oder 3 sich selbst durchschneidet, ein Fall, der von der Betrachtung ausgeschlossen werden möge. Wenn man nämlich zur Grenze $\varepsilon=0$ übergeht, so wird nach (60) und (63)

$$\begin{aligned}&\lim\varphi_\varepsilon(\vartheta_0)=\lim\varphi(\vartheta_0)=\varphi(t_0)\\ &\lim\psi_\varepsilon(\vartheta_0)=\lim\psi(\vartheta_0)=\psi(t_0)\\ &\lim\varphi_\varepsilon(\vartheta_3)=\lim\varphi(\vartheta_3)=\overline{\varphi_1}(t_3)=\varphi(t_3)\\ &\lim\psi_\varepsilon(\vartheta_3)=\lim\psi(\vartheta_3)=\overline{\psi_1}(t_3)=\psi(t_3),\end{aligned}$$

und daher (nach der eben gemachten Voraussetzung): $\lim\vartheta_0=t_0$, $\lim\vartheta_3=t_3$.

Da nun auch: $\lim\varphi_\varepsilon^{(\mu)}(\vartheta_0)=\lim\varphi^{(\mu)}(\vartheta_0)=\varphi^{(\mu)}(t_0)$,

$$\lim\psi_\varepsilon^{(\mu)}(\vartheta_0)=\psi^{(\mu)}(t_0),\ \lim\varphi_\varepsilon^{(\mu)}(\vartheta_3)=\varphi^{(\mu)}(t_3)\ \text{u. s. w.}$$

und mindestens eine der Grössen $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ und eine der $\varphi'(t_3)$, $\psi'(t_3)$, für kleine ε also auch eine der $\varphi_\varepsilon'(\vartheta_0)$, $\psi_\varepsilon'(\vartheta_0)$ und eine der $\varphi_\varepsilon'(\vartheta_3)$, $\psi_\varepsilon'(\vartheta_3)$ nicht verschwindet, so liefern die übrigen Gleichungen (63) ($\mu=1,\,2,\,\ldots\,n-1$) mit Hilfe von (2) durch successive, lineare Auflösung für die Unbekannten ϑ_0', ϑ_0'', $\ldots\,\vartheta_0^{(n-1)}$, ϑ_3', $\ldots\,\vartheta_3^{(n-1)}$ ($\vartheta_0^{(\mu)}=\vartheta_0^{(\mu)}(t_0)$, $\vartheta_3^{(\mu)}=\vartheta_3^{(\mu)}(t_3)$) eindeutig bestimmte Werte von der Beschaffenheit, dass auch die absoluten Beträge der Grössen:

$$\tau_0^{(\mu)} = \vartheta_0^{(\mu)} - e_{\mu,1} = \tau_0^{(\mu)}(t_0), \quad \tau_3^{(\mu)} = \vartheta_3^{(\mu)} - e_{\mu,1} = \tau_3^{(\mu)}(t_3)$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots n-1)$$

mit ε gleichzeitig unendlich klein werden, also schliesslich:

$$\tau_0^{(\mu)} = \varepsilon\, \bar{\tau}_0^{(\mu)} + (\varepsilon)_2, \quad \tau_3^{(\mu)} = \varepsilon\, \bar{\tau}_3^{(\mu)} + (\varepsilon)_2$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots n-1).$$

Nun kann man eine einzige Function:

$$\tau = \tau(t) = \tau(t; \varepsilon) = \varepsilon\, \bar{\tau}(t) + (\varepsilon)_2$$

bestimmen, welche im Intervall $t_0 < t \leqq t_3$ mit beliebig vielen Ableitungen stetig ist, für $\varepsilon = 0$ sich auf 0 reduciert und den Bedingungen genügt:

$$\tau^{(\mu)}(t_0) = \tau_0^{(\mu)}, \quad \tau^{(\mu)}(t_3) = \tau_3^{(\mu)} \tag{64}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots n-1),$$

z. B.

$$\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \tau_0^{(i)} k_i(t; t_0, t_3) + \tau_3^{(i)} k_i(t; t_3, t_0) \right\},$$

wo die ganze Function

$$k_i(t) = k_i(t; t_0, t_3) = (t - t_3)^n \chi_i(t)$$

nur den Bedingungen zu genügen braucht:

$$k_i^{(\mu)}(t_0) = e_{\mu,i}, \quad k_i^{(\mu)}(t_3) = 0$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots n-1).$$

Dies aber kann nach den zu (50) gemachten Bemerkungen durch entsprechende Bestimmung der $\chi_i^{(\mu)}(t_0)$ immer erreicht werden, nämlich durch

$$\chi_i^{(\mu)}(t_0) = D^\mu \left[\frac{(t - t_0)^i}{i!\,(t - t_3)^n} \right]_{t = t_0} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n-1),$$

da dann in der That:

$$k_i^{(\mu)}(t_0) = D^\mu \left[(t - t_3)^n \chi_i(t) \right]_{t_0} = D^\mu \left[\frac{(t - t_0)^i}{i!} \right]_{t_0} = e_{\mu,i}$$

wird, wir erhalten also:

$$k_i(t;\, t_0,\, t_3) = (t - t_3)^n \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^\mu}{\mu!}\, D^\mu \left[\frac{(t-t_0)^i}{i!\,(t-t_3)^n}\right]_{t_0}$$
$$(i = 0,\, 1,\, \ldots\, n-1),$$

ganze Functionen von t und unabhängig von ε, sodass der aus ihnen in der angegebenen Weise gebildete Ausdruck für τ in der That allen gestellten Forderungen genügt.

Mit Hilfe von (64) lassen sich jetzt die Gleichungen (63) in der Form schreiben:

$$(65)\quad \begin{aligned} D^\mu \varphi_\varepsilon(t+\tau) &= \varphi^{(\mu)}(t_0) \\ D^\mu \psi_\varepsilon(t+\tau) &= \psi^{(\mu)}(t_0) \end{aligned} \Big\} \quad (t = t_0)$$
$$\begin{aligned} D^\mu \varphi_\varepsilon(t+\tau) &= \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) \\ D^\mu \psi_\varepsilon(t+\tau) &= \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) \end{aligned} \Big\} \quad (t = t_3)$$
$$(\mu = 0,\, 1,\, \ldots\, n-1),$$

und wenn man folgende gestattete Darstellung der Curve a_ε einführt:

$$(66)\quad \begin{aligned} x = \varphi_\varepsilon(t+\tau) &= \varphi(t) + \xi(t;\, \varepsilon) = \varphi(t) + \varepsilon\, \bar{\xi}(t) + (\varepsilon)_2 \\ y = \psi_\varepsilon(t+\tau) &= \psi(t) + \eta(t;\, \varepsilon) = \psi(t) + \varepsilon\, \bar{\eta}(t) + (\varepsilon)_2 \end{aligned}$$
$$(t_0 \leq t \leq t_3),$$

mit Benutzung von (60) auch folgendermaassen:

$$(67)\quad \begin{aligned} \xi^{(\mu)}(t_0;\, \varepsilon) &= 0 \\ \eta^{(\mu)}(t_0;\, \varepsilon) &= 0 \\ \xi^{(\mu)}(t_3;\, \varepsilon) &= \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) - \varphi^{(\mu)}(t_3) = \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) - \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3) \\ &= -\varepsilon\, \overline{\varphi_1}^{(\mu+1)}(t_3) + (\varepsilon)_2 \\ \eta^{(\mu)}(t_3;\, \varepsilon) &= \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) - \psi^{(\mu)}(t_3) = \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) - \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3) \\ &= -\varepsilon\, \overline{\psi_1}^{(\mu+1)}(t_3) + (\varepsilon)_2 \end{aligned}$$
$$(\mu = 0,\, 1,\, \ldots\, n-1),$$

schliesslich aber, durch Vergleichung der Coefficienten von ε:

$$\bar{\xi}^{(\mu-1)}(t_0) = 0, \qquad \bar{\eta}^{(\mu-1)}(t_0) = 0,$$

$$(68)\quad \bar{\xi}^{(\mu-1)}(t_3) = -\bar{x_3}^{(\mu)} = -x_3^{(\mu)} - e_{\mu,n}(\bar{x_3}^{(n)} - x_3^{(n)}),$$

$$\bar{\eta}^{(\mu-1)}(t_3) = -\bar{y_3}^{(\mu)} = -y_3^{(\mu)} - e_{\mu,n}(\bar{y_3}^{(n)} - y_3^{(n)})$$

$$(\mu = 1,\ 2,\ \ldots\ n).$$

Den Gleichungen (67) kann durch passende Functionen $\xi(t;\varepsilon)$ und $\eta(t;\varepsilon)$ immer genügt werden, nach den Betrachtungen von (64) z. B. durch:

$$\xi(t,\varepsilon) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \xi^{(\mu)}(t_3,\varepsilon)\, k_\mu(t;t_3,t_0)$$

$$\eta(t,\varepsilon) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \eta^{(\mu)}(t_3,\varepsilon)\, k_\mu(t;t_3,t_0)$$

und dann liefert der Ansatz:

$$x = \varphi(t) + \xi(t,\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(t),$$

$$y = \psi(t) + \eta(t,\varepsilon) = \psi_\varepsilon(t)$$

gemäss (66) (für $\tau = 0$) jedenfalls eine Curve a_ε von der verlangten Beschaffenheit, womit die Ausführbarkeit der vorausgesetzten Constructionen erwiesen ist.

Jetzt werden die über 0 3 und 0 4 erstreckten Integrale:

$$J_{03} = \int_{t_0}^{t_3} F(\varphi^{(\mu)}(t),\ \psi^{(\mu)}(t))\, dt$$

und nach (66):

$$(69)\ J_{04} = \int_{t_0}^{t_3} F(\varphi^{(\mu)}(t) + \varepsilon\,\bar{\xi}^{(\mu)}(t) + (\varepsilon)_2,\ \psi^{(\mu)}(t) + \varepsilon\,\bar{\eta}^{(\mu)}(t) + (\varepsilon)_2)\, dt$$

$$= J_{03} + \varepsilon\,\delta J_{03} + (\varepsilon)_2.$$

Hier ist nach (41):

$$\delta J_{03} = \int_{t_0}^{t_3} \sum_{\mu=0}^{n} \left(X_\mu \bar{\xi}^{(\mu)} + Y_\mu \bar{\eta}^{(\mu)} \right) dt$$

$$\left(x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t),\ y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t),\ X_\mu = \frac{\partial F}{\partial x^{(\mu)}} \text{ u. s. w.} \right)$$

oder, da unter den gemachten Voraussetzungen die Umformung (42) immer zulässig ist:

$$\delta J_{03} = \left[\sum_{\mu=1}^{n} \left(P_\mu \bar{\xi}^{(\mu-1)} + Q_\mu \bar{\eta}^{(\mu-1)} \right) \right]_{t_0}^{t_3} + \int_{t_0}^{t_3} (P\bar{\xi} + Q\bar{\eta})\, dt.$$

Da a der Differentialgleichung des Problems genügen soll, so verschwindet wegen $P = 0$ und $Q = 0$ das zweite Glied, und es wird nun wegen (68):

$$\delta J_{03} = -\sum_{\mu=1}^{n} \left(P_\mu(t_3)\, \bar{x}_3^{(\mu)} + Q_\mu(t_3)\, \bar{y}_3^{(\mu)} \right)$$

$$= -\sum_{\mu=1}^{n} \left[P_\mu x^{(\mu)} + Q_\mu y^{(\mu)} \right]_{t=t_3} - P_n(t_3)\left(\bar{x}_3^{(n)} - x_3^{(n)}\right)$$

$$- Q_n(t_3)\left(\bar{y}_3^{(n)} - y_3^{(n)}\right)$$

oder, mit Benutzung von $(18)_1$ und (8):

(70) $$\delta J_{03} = -F(t_3) - X_n(t_3)\left(\bar{x}_3^{(n)} - x_3^{(n)}\right) - Y_n(t_3)\left(\bar{y}_3^{(n)} - y_3^{(n)}\right).$$

Das über 4 3 erstreckte Integral aber wird:

(71) $$J_{43} = \int_{t_3-\varepsilon}^{t_3} F\left(\bar{\varphi}_1^{(\mu)}(t),\ \bar{\psi}_1^{(\mu)}(t)\right) dt$$

gemäss der Form (61) für $\bar{a}$, oder

$$J_{43} = \varepsilon\, F\left(\bar{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3),\ \bar{\psi}_1^{(\mu)}(t_3)\right) + (\varepsilon)_2$$

$$= \varepsilon\, F\left(\bar{x}_3^{(\mu)},\ \bar{y}_3^{(\mu)}\right) + (\varepsilon)_2,$$

so dass schliesslich wegen (69), (70) und (71):

$$(72) \qquad J_{04} - J_{03} + J_{43} = J_{043} - J_{03}$$

$$= \varepsilon E(x_3^{(\mu)}, y_3^{(\mu)}; \bar{x}_3^{(n)}, \bar{y}_3^{(n)}) + (\varepsilon)_2,$$

oder nach (62)

$$= \frac{\iota}{\lambda'} E(x_3^{(\mu)}, y_3^{(\mu)}; \bar{x}_3^{(n)}, \bar{y}_3^{(n)}) + (\iota)_2,$$

wenn gesetzt wird:

$$(73) E(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; x^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) = F - F - X_n(\bar{x}^{(n)} - x^{(n)}) - Y_n(\bar{y}^{(n)} - y^{(n)})$$

$$= F(\bar{x}^{(\mu)}, \bar{y}^{(\mu)}) - F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) - X_n(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})(\bar{x}^{(n)} - x^{(n)})$$

$$- Y_n(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})(\bar{y}^{(n)} - y^{(n)}),$$

wo nach (62):

$$\bar{x}^{(\mu)} = x^{(\mu)}, \ \bar{y}^{(\mu)} = y^{(\mu)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n-1),$$

also:

$$\overline{F} = F(\bar{x}^{(\mu)}, \bar{y}^{(\mu)})$$

$$= F(x, x', \ldots x^{(n-1)}, \bar{x}^{(n)}; y, y' \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}).$$

Lässt man hier die Argumente $x^{(\mu)}, y^{(\mu)}$ $(\mu = 0, 1, \ldots n-1)$ überall fort und ersetzt:

$$x^{(n)}, y^{(n)}; \quad \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}$$

der Reihe nach durch

$$p, \quad q; \qquad p, \quad \bar{q},$$

so kann man abgekürzt schreiben:

$$(73a) \qquad E(p, q; \bar{p}, \bar{q}) =$$

$$F(p, \bar{q}) - F(p, q) - \frac{\partial F(p, q)}{\partial p}(\bar{p} - p) - \frac{\partial F(p, q)}{\partial q}(\bar{q} - q).$$

Die Gleichung (72) entspricht genau der von Herrn Prof. Weierstrass für den Fall $n = 1$ abgeleiteten, ebenso auch die Formel (73) oder (73a) einem der von ihm für die Function E aufgestellten Ausdrücke.

Nach (60a) ist hier mit Hilfe von (2):

$$\bar{x}^{(n)} = \bar{\varphi}_1^{(n)}(t_3) = D^n \bar{\varphi}(\lambda) = R_n\left(\bar{\varphi}^{(\mu)}(\lambda),\ \lambda^{(\mu)}\right)$$

$$\bar{y}^{(n)} = \bar{\psi}_1^{(n)}(t_3) = D^n \bar{\psi}(\lambda) = R_n\left(\bar{\psi}^{(\mu)}(\lambda),\ \lambda^{(\mu)}\right),$$

also abhängig von den Grössen $\lambda,\ \lambda' \ldots \lambda^{(n)}$, von denen durch (60) nur die ersten $\lambda,\ \lambda', \ldots \lambda^{(n-1)}$ bestimmt werden, während $\lambda^{(n)}$ noch gänzlich willkürlich bleibt. Da aber E seiner geometrischen Bedeutung wegen einen bestimmten Wert besitzen muss, so wird es nur scheinbar von $\lambda^{(n)}$ abhängen können und seine nach $\lambda^{(n)}$ genommene Ableitung identisch verschwinden müssen.

In der That wird nach (2) mit Hilfe von (60)

$$\frac{\partial \bar{x}^{(n)}}{\partial \lambda^{(n)}} = \bar{\varphi}'(\lambda) = \frac{\varphi'(t_3)}{\lambda'} = \frac{x'}{\lambda'},$$

$$\frac{\partial \bar{y}^{(n)}}{\partial \lambda^{(n)}} = \bar{\psi}'(\lambda) = \frac{\psi'(t_3)}{\lambda'} = \frac{y'}{\lambda'},$$

also nach (73):

$$(74) \qquad \frac{\partial E}{\partial \lambda^{(n)}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \lambda^{(n)}} - \frac{\partial \bar{x}^{(n)}}{\partial \lambda^{(n)}} \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} - \frac{\partial \bar{y}^{(n)}}{\partial \lambda^{(n)}} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

weil nach $(17)_n$:

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \frac{\partial \bar{x}^{(n)}}{\partial \lambda^{(n)}} + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial \bar{y}^{(n)}}{\partial \lambda^{(n)}} = \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} x' + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} y'\right) = 0$$

und:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \lambda^{(n)}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^{(n)}} \frac{\partial x^{(n)}}{\partial \lambda^{(n)}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}^{(n)}} \frac{\partial \bar{y}^{(n)}}{\partial \lambda^{(n)}} = \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x^{(n)}} x' + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}^{(n)}} y'\right) = 0.$$

Sei jetzt $\varrho = \varrho(t) = \varrho(t; \varepsilon) = \varepsilon\, \bar{\varrho}(t) + (\varepsilon)_2$ eine für alle Werte von t mit ε gleichzeitig unendlich klein werdende ganze Function von t, die den Bedingungen genügt:

$$\varrho^{(\mu)}(t_0) = \tau_0^{(\mu)}, \qquad \varrho^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) = \tau_3^{(\mu)} + e_{\mu,0}\, \varepsilon$$
$$(\mu = 0,\ 1,\ \ldots n-1),$$

wo $\tau_0^{(\mu)}$, $\tau_3^{(\mu)}$ dieselben Bedeutungen wie in (64) haben; eine solche

Function kann nach dem Verfahren von (64) immer bestimmt werden, nämlich

$$\varrho = \sum_{\mu=0}^{n-1} \left\{ \tau_0^{(\mu)}\, k_\mu(t; t_0, t_3 - \varepsilon) + \left(\tau_3^{(\mu)} + e_{\mu,0}\,\varepsilon\right) k_\mu(t; t_3 - \varepsilon, t_0) \right\}.$$

Dann werden die Gleichungen (65) übergehen in die folgenden:

$$\begin{aligned}
\left[D^\mu \varphi_\varepsilon(t+\varrho)\right]_{t=t_0} &= \left[D^\mu \varphi_\varepsilon(t+\tau)\right]_{t_0} = \varphi^{(\mu)}(t_0) \\
\left[D^\mu \psi_\varepsilon(t+\varrho)\right]_{t_0} &= \left[D^\mu \psi_\varepsilon(t+\tau)\right]_{t_0} = \psi^{(\mu)}(t_0) \\
\left[D^\mu \varphi_\varepsilon(t+\varrho)\right]_{t_3-\varepsilon} &= \left[D^\mu \varphi_\varepsilon(t+\tau)\right]_{t_3} = \bar{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3-\varepsilon) \\
\left[D^\mu \psi_\varepsilon(t+\varrho)\right]_{t_3-\varepsilon} &= \left[D^\mu \psi_\varepsilon(t+\tau)\right]_{t_3} = \psi_1^{(\mu)}(t_3-\varepsilon)
\end{aligned} \tag{75}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots n-1).$$

Ist daher, wie vorausgesetzt,

$$t_1 \leqq t_0 < t_3 \leqq t_2,$$

so kann der zusammengesetzte Linienzug 1 0 4 3 2 ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x &= \varphi(t), & y &= \psi(t) & (t_1 \leqq t \leqq t_0) \\
x &= \varphi_\varepsilon(t+\varrho), & y &= \psi_\varepsilon(t+\varrho) & (t_0 \leqq t \leqq t_3 - \varepsilon) \\
x &= \bar{\varphi}_1(t), & y &= \bar{\psi}_1(t) & (t_3 - \varepsilon \leqq t \leqq t_3) \\
x &= \varphi(t), & y &= \psi(t) & (t_3 \leqq t \leqq t_2),
\end{aligned} \tag{76}$$

wo die Grössen

$$x^{(\mu)} = \frac{d^\mu x}{dt^\mu}, \quad y^{(\mu)} = \frac{d^\mu y}{dt^\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n-1)$$

wegen (60) und (75) auch an den Übergangsstellen $t = t_0$, $t = t_3 - \varepsilon$, $t = t_3$ der Curven a, a_ε und $\bar{a}$ immer stetig bleiben und wo die entsprechenden absoluten Beträge

$$\left| x^{(\mu)} - \varphi^{(\mu)}(t) \right. , \qquad \left. y^{(\mu)} - \psi^{(\mu)}(t) \right|$$

für alle Werte von t zwischen t_1 und t_2 mit ε gleichzeitig unendlich klein werden; denn da

$$\varrho = \varepsilon \bar{\varrho}(t) + (\varepsilon)_2$$

und

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t) + \varepsilon \bar{\varphi}_\varepsilon(t) + (\varepsilon)_2 ,$$

so wird auch:

$$D^\mu \varphi_\varepsilon(t + \varrho) = \varphi^{(\mu)}(t) + (\varepsilon)$$

und für $t_3 - \varepsilon \leqq t \leqq t_3$ auch:

$$\bar{\varphi}_1^{(\mu)}(t) = \bar{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3) + (\varepsilon) = \varphi^{(\mu)}(t_3) + (\varepsilon) = \varphi^\mu(t) + (\varepsilon)$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots n - 1).$$

Ausserdem berührt diese Curve 10432 die erste a oder 1032 in den Punkten 1 und 2 von der Ordnung $n - 1$, da

$$\begin{array}{llll} x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t_1), & y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t_1) & (t = t_1) & \\ y^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t_2), & y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t_2) & (t = t_2) & (\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1), \end{array}$$

wegen (75) auch in den Grenzfällen, wo einer der Punkte 0 oder 3 mit 1 oder 2 zusammenfällt.

Es kann daher 10432 als eine „erlaubte“ und für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ beliebig eng „benachbarte“ Variation von a oder 1 2 angesehen werden, wenn in den Definitions-Gleichungen (34) und (37) $r = m = n - 1$ angenommen wird. Da nun alle Teil-Integrale unabhängig sind von der besonderen Darstellung der Curven, so kann man hier die Formel (72) benutzen und erhält:

$$\begin{aligned} \Delta J &= J_{10432} - J_{1032} = J_{043} - J_{03} \\ &= \varepsilon E\left(x_3^{(\mu)},\ y_3^{(\mu)};\ \bar{x}_3^{(n)},\ y_3^{(n)}\right) + (\varepsilon)_2, \end{aligned}$$

ein Ausdruck, der nach (31) wenigstens für hinreichend kleine ε immer positiv sein muss, wenn dem Stück 1 2 von a ein wirkliches Minimum des betrachteten Integrales entsprechen soll, also wegen $\varepsilon > 0$ auch:

$$(77) \qquad E\left(x_3^{(\mu)},\ y_3^{(\mu)};\ \bar{p},\ \bar{q}\right) = E\left(t_3;\ \bar{p},\ \bar{q}\right) \geqq 0$$

unabhängig von ε, aber für beliebige Werte der Grössen $\bar{p}$, q.

Da nun die Punkte 0 und 3 zwischen 1 und 2 willkürlich angenommen werden durften, so muss auch allgemein:

$$E(t; \bar{p}, \bar{q}) \geqq 0$$

sein für das ganze Intervall $t_1 < t < t_2$ als eine notwendige Bedingung für das Bestehen eines Minimums in dem angegebenen Sinne.

Satz V. *Soll unter der Annahme $r = m = n-1$ in (34) und (37) ein unseren bisherigen Voraussetzungen entsprechendes Stück 1 2 einer Lösung a der Differentialgleichung des Problems ein wirkliches Minimum des Integrales liefern, so darf die Function $E(t; \bar{p}, \bar{q})$ an keiner Stelle t des ganzen Intervalls $t_1 \ldots t_2$ für irgend welche Werte der Grössen $\bar{p}, \bar{q}$ negativ werden können.*

Um nun das Vorzeichen der Function E zu untersuchen, wollen wir dieselbe einer gewissen für $n=1$ ebenfalls schon von Herrn Prof. Weierstrass angegebenen Umformung unterziehen.

Es ist nach (73a):

$$E(p, q; \bar{p}, \bar{q}) = F(\bar{p}, \bar{q}) - F(p, q) - \frac{\partial F}{\partial p}(p, q)(\bar{p} - p) - \frac{\partial F}{\partial q}(p, q)(\bar{q} - q).$$

Setzt man hier:

$$p_\varepsilon = p + \varepsilon(\bar{p} - p), \quad q_\varepsilon = q + \varepsilon(\bar{q} - q),$$

so dass für $\varepsilon = 0$: $p_\varepsilon = p$, $q_\varepsilon = q$,

und für $\varepsilon = 1$: $p_\varepsilon = \bar{p}$, $q_\varepsilon = \bar{q}$,

so wird:

$$E(p, q; \bar{p}, \bar{q}) = \Big[F(p_\varepsilon, q_\varepsilon) + (1-\varepsilon)(\bar{p} - p)\frac{\partial F}{\partial p_\varepsilon}(p_\varepsilon, q_\varepsilon) + (1-\varepsilon)(\bar{q} - q)\frac{\partial F}{\partial q_\varepsilon}(p_\varepsilon, q_\varepsilon)\Big]_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}$$

$$= \int_0^1 (1-\varepsilon)\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial p_\varepsilon^2}(p_\varepsilon, q_\varepsilon)(\bar{p} - p)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial p_\varepsilon \partial q_\varepsilon}(p_\varepsilon, q_\varepsilon)(\bar{p} - p)(\bar{q} - q) + \frac{\partial^2 F}{\partial q_\varepsilon^2}(p_\varepsilon, q_\varepsilon)(\bar{q} - q)^2\right\} d\varepsilon,$$

oder, da nach (19):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_\varepsilon^2} = y'^2 F_1(p_\varepsilon, q_\varepsilon), \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q_\varepsilon^2} = x'^2 F_1(p_\varepsilon, q_\varepsilon),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_\varepsilon \partial q_\varepsilon} = -x' y' F_1(p_\varepsilon, q_\varepsilon),$$

$$E(p, q; \bar{p}, \bar{q}) = \left(y'(\bar{p} - p) - x'(\bar{q} - q)\right)^2 \int_0^1 F_1(p_\varepsilon, q_\varepsilon)(1-\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= (\bar{k} - k)^2 E_1(p, q; \bar{p}, \bar{q}), \tag{78}$$

wenn:

$$y' p - x' q = k, \quad y' \bar{p} - x' \bar{q} = \bar{k}$$

gesetzt wird und das bestimmte Integral mit E_1 bezeichnet. Für $n > 1$ ist diese Formel immer anwendbar, so lange die nach p_ε und q_ε genommenen zweiten partiellen Ableitungen und daher auch F_1 endlich und stetig bleiben (vergl. die bei (19) gemachte Bemerkung).

Da in (78) der erste Factor immer positiv ist, so darf auch E_1 im Falle eines Minimums immer nur ein positives Vorzeichen besitzen.

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf das Integral (78) erhält man, was sich noch einfacher direkt aus (73a) durch Berechnung des Restgliedes der Taylorschen Entwicklung ergeben hätte:

$$E_1(p, q; \bar{p}, \bar{q}) = F_1(p_\varkappa, q_\varkappa) \int_0^1 (1-\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{2} F_1(p_\varkappa, q_\varkappa), \tag{79}$$

wo $\varkappa$ eine gewisse Grösse zwischen 0 und 1 bedeutet.

Die Formeln (78) und (79) gestatten nun folgende Schlüsse:

1. Für hinreichend klein gewählte $|\bar{p} - p|$ und $|q - q|$ erhalten E_1 und E immer dasselbe Vorzeichen wie $F_1(p_\varepsilon, q_\varepsilon)$ und somit auch wie $F_1(p, q)$, falls dieser Ausdruck nicht verschwindet, während gleichzeitig $k - k = y'(\bar{p} - p) - x'(\bar{q} - q)$ und daher auch E bei geeigneter Wahl von p und q von 0 verschieden angenommen werden kann.

2. Besitzt $F_1(p, q)$ für irgend eine Combination der fortgelassenen Argumente $x, x' \ldots x^{(n-1)}$; $y, y' \ldots y^{(n-1)}$ ein be-

stimmtes, von p, q unabhängiges Vorzeichen, so besteht dasselbe Vorzeichen auch für alle zugehörigen $F_1(p_t, q_t)$ und damit auch für $E_1(p, q; \bar{p}, \bar{q})$ und $E(p, q; \bar{p}, q)$, unabhängig von $\bar{p}$ und $\bar{q}$.

Für das Stattfinden der in V verlangten Eigenschaft eines Curvenstückes a ist also:

(80) 1. notwendig, dass $F_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) \geqq 0$ ist auf dem ganzen Curvenstück, d. h. für

$$x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t), \quad y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t) \qquad (\mu = 0, 1 \ldots n; t_1 \leqq t \leqq t_2),$$

(81) 2. hinreichend, dass $F_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) \geqq 0$ ebenfalls auf dem ganzen Curvenstück, für

$$x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t), \quad y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t) \qquad (\mu = 0, 1 \ldots n-1),$$

aber für willkürliche Werte der $x^{(n)} = p, \quad y^{(n)} = q$.

In V ist also noch folgende notwendige Bedingung des Minimums enthalten, die, nur in anderer Form, gewöhnlich aus der Betrachtung der „zweiten Variation“ gewonnen wird:

Satz VI. *Wenn a ein wirkliches Minimum liefern soll, so darf in der ganzen Ausdehnung des Curvenstückes die Function F_1, oder was nach (19) dasselbe bedeutet, die Function $\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)2}}$ oder $\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}}$, aus den Ableitungen $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ der Coordinaten von a selbst gebildet, nirgendwo negative Werte annehmen.*

Hier ist der Beweis nur geführt für $r = m = n-1$ in (34) und (37); doch lässt er sich unmittelbar übertragen auf $m = n$, da, wie man sich leicht überzeugt, durch Verkleinerung von $|\bar{p} - p| = |\varphi^{(n)}(t_3) - \varphi^{(n)}(t_3)|$ und $|\bar{q} - q| = |\bar{\psi}^{(n)}(t_3) - \psi^{(n)}(t_3)|$ in (76) auch überall $|x^{(n)} - \varphi^{(n)}(t)|$ und $|y^{(n)} - \psi^{(n)}(t)|$ beliebig klein gemacht werden können. Nur der Satz V, welcher die unbeschränkt willkürliche Wahl der p, q voraussetzt, muss dann seine Gültigkeit verlieren, während VI gerade durch Betrachtung kleiner $|p - p|$, $|q - q|$ abgeleitet war.

Für den Fall $n = 1$ geht wegen

$$(17)_n \qquad p \frac{\partial F}{\partial p'}(p, q) + q \frac{\partial F}{\partial q}(p, q) = F(p, q) \qquad (p = x', \; q = y')$$

die Formel (73a) über in:

$$E(p, q; \bar{p}, \bar{q}) = F(\bar{p}, \bar{q}) - \bar{p}\frac{\partial F}{\partial p}(p, q) - \bar{q}\frac{\partial F}{\partial q}(p, q),$$

und es wird infolge der vorausgesetzten Homogeneität $(17)_n$ von $F(p, q)$, also auch von $F(\bar{p}, \bar{q})$: $F(-\bar{p}, -\bar{q}) = -F(\bar{p}, \bar{q})$, ebenso auch $E(p, q; -\bar{p}, -\bar{q}) = -E(p, q; \bar{p}, \bar{q})$, wenn F als eine eindeutige analytische, z. B. als eine rationale Function von p und q angenommen wird. Es kann demnach $E(p, q; \bar{p}, \bar{q})$, wenn es nicht etwa für beliebige $\bar{p}$, $\bar{q}$ immer verschwinden sollte, für passend gewählte Werte dieser Grössen beliebig auch negativ gemacht werden, und ein Minimum in dem angegebenen Sinne $(m = r = n - 1 = 0)$ ist unmöglich.

Dieser von Herrn Prof. Weierstrass in der dargestellten Weise allgemein bewiesene Satz lässt sich aber auf den Fall $n > 1$ nicht übertragen.

Auch für rationale Functionen $F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})$ kann die Function E ein von $\bar{p}$, $\bar{q}$ unabhängiges Vorzeichen und das zugehörige Integral in einer Nachbarschaft von der Ordnung $m \leqq n-1$ ein wirkliches Minimum besitzen, wenn $n > 1$ ist.

Dies soll zunächst durch ein Beispiel gezeigt werden.

Es sei nämlich:

$$F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) = y_n^2 x' = \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2 x',$$

nach (20) eine gestattete Annahme. Hier kann, wie man sich durch vollständige Induction leicht überzeugt, geschrieben werden:

$$(82) \qquad y_n = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{x' y^{(n)} - y' x^{(n)}}{x'^{n+1}} + (x^{(\mu)}, y^{(\mu)})_{n-1},$$

wo der Klammerausdruck die Grössen $p = x^{(n)}$ und $q = y^{(n)}$ nicht mehr enthält. Daher ist:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2 y_n \frac{\partial y_n}{\partial p} x' = -\frac{2 y'}{x'^{n+1}} y_n x',$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = y'^2 F_1 = \frac{2 y'^2 x'}{x'^{2n+2}},$$

$$F_1(p, q) = \frac{2}{x'^{2n+1}} = F_1(p_\varepsilon, q_\varepsilon)$$

und nach (78):

$$E(p, q; \bar{p}, \bar{q}) = (\bar{k}-k)^2 \int_0^1 \frac{2}{x'^{2n+1}}(1-\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{(\bar{k}-k)^2}{x'^{2n+1}}$$

$$= \left(\frac{x'(\bar{p}-p) - y'(\bar{q}-q)}{x'^{n+1}}\right)^2 x',$$

ein Ausdruck, der immer ein positives Vorzeichen hat für $x' \geqq 0$, unabhängig von p, q.

In der That entspricht auch einer Parabel $2n-1$ter Ordnung:

$$(83) \qquad x = \varphi(t) = t, \qquad y = \psi(t) = a_0 + a_1 t + \ldots a_{2n-1} t^{2n-1}$$

für $m < n$ ein wirkliches Minimum des zwischen beliebigen Grenzen t_1 und t_2 erstreckten Integrals: $J = \int y_n^2\, x'\, dt$.

Für alle von einer Ordnung $m \geq 1$ der Parabel benachbarten Curven $\bar{a}$

$$x = \bar{\varphi}(\lambda), \qquad y = \bar{\psi}(\lambda)$$

kann nach (37) immer

$$|\bar{\varphi}'(\lambda)\,\lambda' - \varphi'(x)| = |\bar{\varphi}'(\lambda)\,\lambda' - 1| < 1 \qquad (\lambda' > 0),$$

also

$$\bar{x}' = \bar{\varphi}'(\lambda)\,\lambda' > 0, \qquad \bar{\varphi}'(\lambda) > 0$$

angenommen und daher auch immer eine Darstellung für $\bar{a}$ von der Form:

$$(84) \qquad \bar{x} = t = x, \qquad \bar{y} = \bar{\psi}(t) = \psi(t) + \eta(t) = y + \eta,$$

wo $\bar{\psi}(t)$ und ebenso $\eta(t)$ eine eindeutige Function bedeutet, zu Grunde gelegt werden, so dass:

$$\bar{x}' = 1, \quad \bar{y}_n = \frac{d^n y}{dx^n} = \bar{y}^{(n)} = y^{(n)} + \eta^{(n)} \quad \text{und}$$

$$\bar{J} = J(\bar{a}) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{y}_n^2\, \bar{x}'\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (y^{(n)} + \eta^{(n)})^2\, dt$$

$$(85) \qquad = \int_{t_1}^{t_2} y^{(n)2}\, dt + 2\int_{t_1}^{t_2} y^{(n)}\, \eta^{(n)}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \eta^{(n)2}\, dt.$$

Nun ergiebt sich, wenn in (34) gemäss IV $r \geqq n-1$ angenommen wird, also y und demnach η als eine mit ihren $n-1$ ersten Ableitungen stetige Function von t im ganzen Intervall, durch partielle Integration:

$$\int_{t_1}^{t_2} y^{(n)} \eta^{(n)} dt = \left[y^{(n)} \eta^{(n-1)} - y^{(n+1)} \eta^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} y^{(2n-1)} \eta \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (-1)^n y^{(2n)} \eta \, dt = 0. \tag{86}$$

Hier verschwindet der erste Teil, weil nach (32) die beiden Curven in den Endpunkten t_1 und t_2 einander von $n-1$ter Ordnung berühren, also

$$\eta^{(\mu)} = y^{(\mu)} - \bar{y}^{(\mu)} = y_\mu - \bar{y}_\mu = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n-1),$$

und der zweite Teil wegen:

$$y^{(2n)} = \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{2n-1} t^{2n-1} \right) = 0$$

für alle Werte von t. Es wird also nach (85) und (86):

$$\bar{J} - J = \int_{t_1}^{t_2} \bar{y}_n^2 \, dt - \int_{t_1}^{t_2} y_n^2 \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta^{(n)2} \, dt > 0.$$

Verschwinden könnte die Differenz nur für $\eta^{(n)} = 0$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$, dies aber ergäbe wegen $\eta^{(\mu)}(t_1) = 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots n-1)$ durch $n$fache Integration oder nach dem Taylorschen Satze:

$$\eta = 0, \qquad y = \bar{y} \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2),$$

d. h. beide Curven fielen zusammen. Also:

Das über ein Stück einer Parabel $2n-1$ter Ordnung erstreckte Integral $\int_{t_1}^{t_2} y_n^2 \, dt$ ist immer kleiner als dasselbe Integral, erstreckt über irgend eine andere, die Parabel in den Endpunkten 1 und 2 von $n-1$ter Ordnung berührende Curve mit beständig

wachsender x-Coordinate und stetig sich ändernden Ableitungen bis zur $n-1$ ten Ordnung.

Ausser der Möglichkeit eines Minimums (für $m \leqq n-1$) auch für rationale Functionen F zeigt dieses Beispiel, dass in der Definitionsgleichung (37) unter Umständen auch $m < n-1$, hier nämlich $m = 1$ bei $n > 2$, angenommen werden darf, dass also *für die Ordnungszahl m der Nachbarschaft nicht etwa, dem Satze IV* ($r \geqq n-1$) *analog, eine von 0 oder 1 verschiedene untere Grenze allgemein festgestellt werden kann.*

Der Unterschied der Fälle $n = 1$ und $n > 1$ tritt noch klarer hervor, wenn man gemäss

$$(20)\quad F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) = f(x, y_\mu)\, x', \quad y_\mu = \frac{d^\mu y}{dx^\mu} \quad (\mu = 0, 1, \ldots n)$$

auch die Function E einer entsprechenden Umformung unterzieht.

Für $n = 1$ nämlich ist:

$$F(x, y; x', y') = f(x, y, y_1)\, x' = f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) x',$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = f - \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{y'}{x'}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y_1} = f'(y_1),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(\bar{x'} - x') + \frac{\partial F}{\partial y'}(\bar{y'} - y')$$

$$= f \cdot (\bar{x'} - x') + f'(y_1)\left(-\frac{y'}{x'}(\bar{x'} - x') + \bar{y'} - y'\right)$$

$$= f \cdot (\bar{x'} - x') + f'(y_1)\,\frac{y'\,x' - \bar{x'}\,y'}{x'\,x'}\,\bar{x'}$$

$$= f \cdot (\bar{x'} - x') + f'(y_1)\,(y_1 - y_1)\,\bar{x'},$$

$$F(x, y; \bar{x'}, \bar{y'}) - F(x, y; x', y') = f(x, y, \bar{y}_1)\,\bar{x'} - f(x, y, y_1)\,x'.$$

Also ist nach (73):

$$(87)\quad E(x, y; x', y'; \bar{x'}, \bar{y'}) = \left\{f(x, y, \bar{y}_1) - f(x, y, y_1) - (\bar{y}_1 - y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}\bar{x'}$$

und wechselt für eindeutige Functionen f sein Vorzeichen, wenn

man x', $\bar{y}'$ durch $-x'$, $-\bar{y}'$ ersetzt, wobei $y_1 = \frac{\bar{y}'}{x'}$ unverändert bleibt.

Für $n > 1$ dagegen ist nach (82):

$$y_n = \frac{x' y^{(n)} - y' x^{(n)}}{x'^{n+1}} + (x^{(\mu)}, y^{(\mu)})_{n-1},$$

$$\bar{y}_n = \frac{x' \bar{y}^{(n)} - y' x^{(n)}}{x'^{n+1}} + (x^{(\mu)}, y^{(\mu)})_{n-1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} = -\frac{y'}{x'^{n+1}} \frac{\partial f}{\partial y_n} x', \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = \frac{x'}{x'^{n+1}} \frac{\partial f}{\partial y_n} x',$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} (\bar{x}^{(n)} - x^{(n)}) + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} (\bar{y}^{(n)} - y^{(n)})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y_n} \left\{ \frac{x' \bar{y}^{(n)} - y' \bar{x}^{(n)}}{x'^{n+1}} - \frac{x' y^{(n)} - y' x^{(n)}}{x'^{n+1}} \right\} x'$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y_n} (\bar{y}_n - y_n) x'.$$

Also wird:

$$(88) \qquad E(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) = E(y_n, \bar{y}_n)$$

$$= \left\{ f(\bar{y}_n) - f(y_n) - f'(y_n)(\bar{y}_n - y_n) \right\} x'$$

bei Fortlassung der Argumente $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ $(\mu = 0, 1, \ldots n-1)$.

Hier enthält der zweite Factor x' keine der willkürlichen Grössen $\bar{x}^{(n)}$, $\bar{y}^{(n)}$, so dass der frühere Schluss nicht mehr anwendbar ist, während der erste Factor ebenso wie der in (87) sehr wohl ein von $x^{(n)}$, $\bar{y}^{(n)}$ unabhängiges Vorzeichen besitzen kann.

Setzt man nämlich $y_n = z$, $\bar{y}_n = \bar{z}$, so wird die Function

$$E_2(z, \bar{z}) = f(\bar{z}) - f(z) - (\bar{z} - z) f'(z)$$

an einer Stelle z dann und nur dann für alle Werte von $\bar{z}$ positiv sein, wenn die durch $w = f(\bar{z})$ dargestellte Curve ganz oberhalb der zum Punkte $\bar{z} = z$, $\bar{w} = w = f(z)$ gehörigen Tangente verläuft.

Dazu aber ist

1. notwendig, dass sie an der Stelle z, w nach oben gekrümmt ist: $f''(z) \geqq 0$,

2. hinreichend, dass sie allenthalben nur nach oben gekrümmt ist, $f''(z) \geqq 0$, und ihre Tangentenrichtung $f'(z)$ nur stetig verändert.

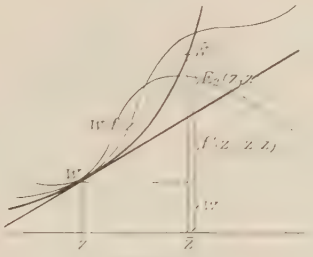

Fig. 3.

Offenbar ist weder die erste Bedingung zugleich hinreichend noch auch die zweite zugleich notwendig. Doch genügt schon die erste Bedingung, wenn $E_2(z, \bar{z})$ nur für alle $\bar{z}$ einer gewissen Umgebung von z positiv zu sein braucht.

Diese Regeln ergeben sich analytisch aus der zu (78) analogen Umformung:

$$E_2(z, \bar{z}) = \left[f'(z_\varepsilon) + (1-\varepsilon) f''(z_\varepsilon)(\bar{z} - z) \right]_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}$$

$$= (\bar{z} - z)^2 \int_0^1 (1-\varepsilon) f''(z_\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} (\bar{z} - z)^2 f''(z_\zeta) \qquad (0 < \zeta < 1),$$

wenn $z + \varepsilon(\bar{z} - z) = z_\varepsilon$ gesetzt wird, also:

$$E(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) = E_2(y_n, \bar{y}_n)\, x' \tag{89}$$

$$= x' (\bar{y}_n - y_n)^2 \int_0^1 (1-\varepsilon) f_2(x, y_\mu, z_\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

wo:
$$f_2(x, y_\mu, y_n) = \frac{\partial^2 f(x, y_\mu, y_n)}{\partial y_n^2}$$

und $$z_\varepsilon = y_n + \varepsilon(\bar{y}_n - y_n).$$

Der wahre Grund des abweichenden Verhaltens von E in den Fällen $n = 1$ und $n > 1$ liegt, (87) und (88) zufolge, darin, dass im ersten Fall der durch (62) definierte Punkt 4 auf derselben

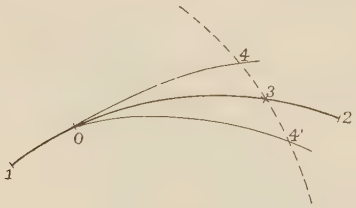

Fig. 4.

Curve $\bar{a}$ von 3 aus nach entgegengesetzten Richtungen fortschreiten kann, wobei die $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ und mit ihnen auch E entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, während für $n > 1$ dies nicht mehr gestattet ist, da nach Satz IV die Ableitungen bis zur Ordnung $n - 1 \geqq 1$ als stetig vorausgesetzt werden müssen.

Die Formeln (87) und (88) kann man auch direct aus der Definition von E ableiten, wenn man sich des bekannten Ausdrucks für die „erste Variation" mit x als unabhängiger Variable bedient, dessen Entwicklung hier noch kurz wiedergegeben werden möge.

Es ist nach (20):

$$F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) = f(x, y_\mu)\, x',$$

wenn $y_\mu = \dfrac{d^\mu y}{dx^\mu}$ als Function der $x^{(\nu)}$, $y^{(\nu)}$ $(\nu \leqq \mu)$ aufgefasst wird. Betrachtet man hier $\xi = \delta x$ und $\eta = \delta y$ als unabhängige Variationen, so wird:

$$\delta y_\mu = \delta \frac{y'_{\mu-1}}{x'} = \frac{\delta y'_{\mu-1}}{x'} - \frac{y'_{\mu-1}\,\delta x'}{x'^2} = \frac{d\,\delta y_{\mu-1}}{dx} - y_\mu \frac{d\,\delta x}{dx},$$

$$(90)\quad \delta y_\mu - y_{\mu+1}\,\delta x = \frac{d}{dx}(\delta y_{\mu-1} - y_\mu\,\delta x) = \frac{d^\mu}{dx^\mu}(\delta y - y_1 \delta x).$$

Nun ist:

$$\delta F = \delta\{f(x, y_\mu)\, x'\} = f\,\delta x' + x'\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + x'\sum_{\mu=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_\mu}\,\delta y_\mu$$

$$= f\,\delta x' + \frac{df}{dt}\,\delta x + x'\sum_{\mu=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_\mu}(\delta y_\mu - y_{\mu+1}\,\delta x)$$

$$= \frac{d}{dt}(f\,\delta x) + x'\sum_{\mu=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_\mu}\frac{d^\mu}{dx^\mu}(\delta y - y_1\,\delta x).$$

Es ist aber, wenn man für den Augenblick x als unabhängige Variable ansieht, nach einer zu (42) analogen Umformung:

$$\sum_{\mu=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_\mu}\frac{d^\mu}{dx^\mu}(\delta y - y_1\,\delta x) = \frac{d}{dx}\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu\frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}(\delta y - y_1\,\delta x)$$

$$+ L(\delta y - y_1\,\delta x),$$

wo: $$L_\mu = \sum_{i=0}^{n-\mu}(-1)^i\frac{d^i}{dx^i}\frac{\partial f}{\partial y_{\mu+i}} \qquad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n)$$

gesetzt wird. Also:

$$\delta F = \frac{d}{dt}\left[f\,\delta x + \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu(\delta y_{\mu-1} - y_\mu\,\delta x)\right] + L(\delta y - y_1\,\delta x)\,x'.$$

Ist nun $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung des Problems und im Intervall $t_1 \leq t \leq t_3$ von singulären Punkten frei, so verschwindet wegen $L = 0$ das zweite Glied und es wird:

$$\delta J_{03} = \left[f\,\delta x + \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu(\delta y_{\mu-1} - y_\mu\,\delta x)\right]_{t_0}^{t_3}.$$

Wenn aber $x + \varepsilon\,\delta x + (\varepsilon)_2$, $y + \varepsilon\,\delta y + (\varepsilon)_2$ die Coordinaten der Curve a_ε oder 0 4 und x, y die von a oder 4 3 darstellen, in der im Anfang des Abschnittes definierten Bedeutung, so wird:

für $t = t_0$: $\delta x = 0$, $\delta y_\mu = 0$ $\qquad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1)$,

weil a und a_ε einander in 0 von $n-1$ ter Ordnung berühren;

für $t = t_3$: $\delta x = -\bar{x}'$, $\delta y_\mu = -\bar{y}_{\mu+1}\bar{x}'$ $(\mu = 0, 1, \ldots n-1)$,

wo $\bar{x}'$, $\bar{y}_\mu$ die Werte dieser Functionen im Punkte 3 von $\bar{a}$ bezeichnen. Es wird daher:

$$J_{04} - J_{03} = \varepsilon\,\delta J_{03} + (\varepsilon)_2$$

$$= \varepsilon\left[-f(x, y_\mu)\bar{x}' - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu(\bar{y}_\mu - y_\mu)\bar{x}'\right]_{t=t_3} + (\varepsilon)_2$$

$$= -\varepsilon\,\bar{x}'\left[f(x, y_\mu) + L_n(x, y_\mu)(\bar{y}_n - y_n)\right] + (\varepsilon)_2,$$

wegen $\bar{y}_\mu = y_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots n-1)$.

Da ferner: $J_{43} = f(x, \bar{y}_\mu)\bar{x}'\,\varepsilon + (\varepsilon)_2$

und $L_n(x, y_\mu) = \dfrac{\partial f}{\partial y_n}$ ist,

so wird schliesslich:

$$J_{043} - J_{03} = \varepsilon\,E + (\varepsilon)_2$$

$$= \left[f(x, \bar{y}_\mu) - f(x, y_\mu) - \frac{\partial f}{\partial y_n}(\bar{y}_n - y_n)\right]\bar{x}'\,\varepsilon + (\varepsilon)_2,$$

also für $n = 1$

$$(87)\qquad E = \left[f(x, y, \bar{y}_1) - f(x, y, y_1) - \frac{\partial f(x, y, y_1)}{\partial y_1}(\bar{y}_1 - y_1)\right]\bar{x}'.$$

Für $n > 1$ aber wegen $\bar{x}' = x'$:

$$(88)\qquad E = \left[f(x, \bar{y}_\mu) - f(x, y_\mu) - \frac{\partial f}{\partial y_n}(\bar{y}_n - y_n)\right]x'.$$

In derselben Weise kann man auch den zur Darstellung:

$$(26)\qquad F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) = \Phi(x, y, \alpha_\mu)\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$J = \int_{s_1}^{s_2} \Phi(x, y, \alpha_\mu)\,ds,$$

gehörigen Ausdruck für E bilden.

Hier wird für $n > 1$ ähnlich wie (82):

$$\alpha_n = \frac{d^{n-2}\alpha_2}{ds^{n-2}} = \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x'y^{(n)} - y'x^{(n)}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{n+1}{2}}} + (x^{(\mu)}, y^{(\mu)})_{n-1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} = -\frac{y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = \frac{x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} (\bar{x}^{(n)} - x^{(n)}) + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} (\bar{y}^{(n)} - y^{(n)})$$

$$= \left\{ \frac{x'\bar{y}^{(n)} - y'\bar{x}^{(n)}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{n+1}{2}}} - \frac{x'y^{(n)} - y'x^{(n)}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$= (\bar{\alpha}_n - \alpha_n) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Also, wenn

$$\bar{F} = F(\bar{x}^{(\mu)}, \bar{y}^{(\mu)}) = \bar{\Phi} \sqrt{x'^2 + y'^2} = \Phi(x, y, \bar{\alpha}_\mu) \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$(\bar{x}^{(\mu)} = x^{(\mu)}, \quad \bar{y}^{(\mu)} = y^{(\mu)}, \quad \bar{\alpha}_\mu = \alpha_\mu \text{ für } \mu = 0, 1, \ldots n-1)$$

gesetzt wird, so ist nach (73):

$$(91) \qquad E = E(x, y, \alpha_\mu; \bar{\alpha}_n) = \left\{ \bar{\Phi} - \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} (\bar{\alpha}_n - \alpha_n) \right\} \frac{ds}{dt}.$$

Hier ist der erste Factor von derselben Form wie der in (88) und (89), es gelten also für ihn dieselben Betrachtungen bezüglich des Vorzeichens wie für E_2 und auch die analoge Umformung:

$$(92) \qquad E = \frac{ds}{dt} (\bar{\alpha}_n - \alpha_n)^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial \alpha_\varepsilon^2} (1 - \varepsilon) \, d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} (\bar{\alpha}_n - \alpha_n)^2 \frac{\partial^2 \Phi_\varkappa}{\partial \alpha_\varkappa^2} \qquad (0 < \varkappa < 1),$$

wo $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial \alpha_\varepsilon^{\,2}}$ den Wert von $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_n^{\,2}}$ bezeichnet, wenn $\alpha_n + \varepsilon(\bar{\alpha}_n - \alpha_n)$ an Stelle von α_n gesetzt wird.

Der andere Factor $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ aber ist unter allen Umständen positiv.

Auch die Formel (91) lässt sich direct aus einer neuen Form der ersten Variation ableiten, deren Entwicklung hier vollständig Platz finden möge, da die Darstellung (26) bisher in der Variationsrechnung, soweit mir bekannt ist, keine Anwendung gefunden hat, für viele, namentlich geometrische Aufgaben jedoch manche Vorzüge zu besitzen scheint.

Nach (26) ist:

$$\delta F = \delta\left(\Phi \frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \Phi\,\delta\frac{ds}{dt} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\delta y + \sum_{\mu=1}^{n} \Phi_\mu\,\delta\alpha_\mu\right]\frac{ds}{dt}, \tag{93}$$

wenn $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_\mu} = \Phi_\mu$ gesetzt wird. Statt der unabhängigen Variationen δx und δy führen wir die neuen δv und δw ein:

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta v = \cos\alpha_1\,\delta x + \sin\alpha_1\,\delta y & \delta x = \cos\alpha_1\,\delta v + \sin\alpha_1\,\delta w \\ \delta w = \sin\alpha_1\,\delta x - \cos\alpha_1\,\delta y, & \delta y = \sin\alpha_1\,\delta v - \cos\alpha_1\,\delta w \end{array}\right. \tag{94}$$

$$\frac{d\delta x}{ds} = \cos\alpha_1\frac{d\delta v}{ds} + \sin\alpha_1\frac{d\delta w}{ds} + \alpha_2(-\sin\alpha_1\,\delta v + \cos\alpha_1\,\delta w),$$

$$\frac{d\delta y}{ds} = \sin\alpha_1\frac{d\delta v}{ds} - \cos\alpha_1\frac{d\delta w}{ds} + \alpha_2(\cos\alpha_1\,\delta v + \sin\alpha_1\,\delta w,$$

$$\frac{d\delta s}{ds} = \frac{\delta\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x'\,\delta x' + y'\,\delta y'}{x'^2 + y'^2} = \cos\alpha_1\frac{d\delta x}{ds} + \sin\alpha_1\frac{d\delta y}{ds},$$

$$\frac{d\delta s}{ds} = \frac{d\delta v}{ds} + \alpha_2\,\delta w, \tag{95}$$

$$\delta\alpha_1 = \delta\,\mathrm{arctg}\frac{y'}{x'} = \frac{x'\,\delta y' - y'\,\delta x'}{x'^2 + y'^2} = \cos\alpha_1\frac{d\delta y}{ds} - \sin\alpha_1\frac{d\delta x}{ds},$$

(96) $$\delta\alpha_1 = -\frac{d\delta w}{ds} + \alpha_2\, dv,$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\sin\alpha_1 + \sum_{\mu=1}^{n} \Phi_\mu\, \alpha_{\mu+1}.$$

Nun geht (93) über in:

$$\frac{\delta(\Phi\, ds)}{ds} = \Phi\left(\frac{d\delta v}{ds} + \alpha_2\,\delta w\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\cos\alpha_1\,\delta v + \sin\alpha_1\,\delta w)$$

$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\sin\alpha_1\,\delta v - \cos\alpha_1\,\delta w) + \sum_{\mu=1}^{n} \Phi_\mu\,\delta\alpha_\mu,$$

(97) $$\frac{\delta(\Phi\, ds)}{ds} = \frac{d}{ds}(\Phi\,\delta v) + \left(\Phi\,\alpha_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\sin\alpha_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos\alpha_1\right)\delta w$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{n} \Phi_\mu\,(\delta\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}\,\delta v).$$

Nun ist aber für $\mu \geqq 2$:

$$\delta\alpha_\mu = \delta\frac{d\alpha_{\mu-1}}{ds} = \frac{\delta d\alpha_{\mu-1}}{ds} - \frac{d\alpha_{\mu-1}}{ds}\frac{\delta ds}{ds}$$

$$= \frac{d\delta\alpha_{\mu-1}}{ds} - \alpha_\mu\left(\frac{d\delta v}{ds} + \alpha_2\,\delta w\right),$$

$$\delta\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}\,\delta v = \frac{d}{ds}(\delta\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu\,\delta v) - \alpha_\mu\,\alpha_2\,\delta w.$$

Also ist für eine beliebige Function A_μ von t oder s:

$$A_\mu(\delta\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}\,\delta v) = \frac{d}{ds}\left[A_\mu(\delta\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu\,\delta v)\right]$$

$$- \frac{d\,A_\mu}{ds}(\delta\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu\,\delta v) - A_\mu\,\alpha_\mu\,\alpha_2\,\delta w.$$

Werden aber die A_μ der Reihe nach definiert durch die Gleichungen:

(98) $$A_\mu + \frac{d\,A_{\mu+1}}{ds} = \Phi_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots n, \quad A_{n+1} = 0),$$

$$A_\mu = \sum_{i=0}^{n-\mu} (-1)^i \frac{d^i}{ds^i} \Phi_{\mu+i},$$

so geht die vorhergehende Gleichung durch Hinzufügung von $\frac{d A_{\mu+1}}{ds} (\delta\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}\delta v)$ auf beiden Seiten über in:

$$\Phi_\mu (\delta\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}\delta v) = \frac{d}{ds}\left[A_\mu (\delta\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu \delta v)\right]$$

$$+ \frac{d A_{\mu+1}}{ds} (\delta\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}\delta v) - \frac{d A_\mu}{ds} (\delta\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu \delta v) - A_\mu \alpha_\mu \alpha_2 \delta w,$$

und wenn man auf beiden Seiten über $\mu = 2, 3 \ldots n$ summiert und das Glied hinzufügt:

$$\Phi_1 (\delta\alpha_1 - \alpha_2 \delta v) = \left(A_1 + \frac{d A_2}{ds}\right)(\delta\alpha_1 - \alpha_2 \delta v),$$

$$(99) \quad \sum_{\mu=1}^{n} \Phi_\mu (\delta\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}\delta v) = \frac{d}{ds} \sum_{\mu=2}^{n} A_\mu (\delta\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu \delta v)$$

$$+ A_1 (\delta\alpha_1 - \alpha_2 \delta v) - \sum_{\mu=2}^{n} A_\mu \alpha_\mu \alpha_2 \delta w.$$

Hier ist aber nach (96):

$$(100) \quad A_1 (\delta\alpha_1 - \alpha_2 \delta v) = - A_1 \frac{d\delta w}{ds} = - \frac{d}{ds} (A_1 \delta w) + \frac{d A_1}{ds} \delta w,$$

so dass nun aus (97), (99) und (100) durch Addition folgt:

$$(101) \quad \frac{\delta (\Phi ds)}{ds} = \frac{d}{ds}\left\{\Phi \delta v - A_1 \delta w + \sum_{\mu=2}^{n} A_\mu (\delta\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu \delta v)\right\}$$

$$+ \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin\alpha_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos\alpha_1 + \alpha_2 \left(\Phi - \sum_{\mu=2}^{n} A_\mu \alpha_\mu\right) + \frac{d A_1}{ds}\right\} \delta w$$

$$= \frac{d\delta K}{ds} + G' \delta w,$$

$$\delta J = \delta \int_{(1)}^{(2)} \Phi \, ds = \Big[\delta K \Big]_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} G' \, \delta w \, ds, \quad \text{wo:}$$

$$(102) \qquad G' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \alpha_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \alpha_1 + \alpha_2 A_0 + \frac{d A_1}{ds} = 0$$

$$\left[A_0 = \Phi - \sum_{\mu=2}^{n} A_\mu \alpha_\mu \right]$$

die Differentialgleichung des Problems ist und $A_0, A_1, \ldots A_n$, die Coefficienten in:

$$\delta K = A_0 \, \delta v - A_1 \, \delta w + \sum_{\mu=2}^{n} A_\mu \, \delta \alpha_{\mu-1},$$

die Ausdrücke sind, welche nach einem zu III analogen Satze immer stetig bleiben müssen für alle Curven a, denen ein Minimum entsprechen soll. Die Beweise werden analog geführt wie im zweiten Abschnitt für die dort zu Grunde gelegte Darstellung.

Für den Fall $n = 2$ z. B., wo $\alpha_1 = \alpha$ den Winkel zwischen Tangente und x-Achse, $\alpha_2 = k$ die Krümmung bedeutet, wird:

$$F = \Phi(x, y, \alpha, k) \frac{ds}{dt},$$

$$A_2 = \Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial k}, \quad A_0 = \Phi - \Phi_2 k, \quad A_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial k}, \quad \text{also}$$

$$G' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \alpha + k \Phi - k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial k} + \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial \Phi}{\partial k},$$

$$\delta K = \left(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial k} k \right) \delta v - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial k} \right) \delta w + \frac{\partial \Phi}{\partial k} \delta \alpha.$$

Zur Berechnung von E nehmen wir an, dass sich der Punkt 4 unserer Fig. 2 auf der Curve a um das Bogenelement σ von 3 aus rückwärts verschoben habe, und es seien $x + \sigma \delta x + (\sigma)_2$, $y + \sigma \delta y + (\sigma)_2$ die Coordinaten von 0 4 oder a_σ, wenn die entsprechenden von a oder 0 3 mit x, y bezeichnet werden. Dann ist für den Punkt 0:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0; \quad \delta v = 0, \quad \delta w = 0,$$

$$\delta \alpha_1 = 0, \ldots \delta \alpha_{n-1} = 0, \quad \text{also} \quad \delta K = 0,$$

für den Punkt 4 aber, den wir durch Variation von 3 entstanden denken:

$$\delta x = -\frac{\overline{dx}}{ds} = -\cos\overline{\alpha}_1, \qquad \delta y = -\frac{\overline{dy}}{ds} = -\sin\overline{\alpha}_1,$$

$$\delta v = -\cos(\alpha_1 - \overline{\alpha}_1), \qquad \delta w = \sin(\overline{\alpha}_1 - \alpha_1),$$

und für $n > 1$ wegen $\overline{\alpha}_\mu = \alpha_\mu \quad (\mu < n)$:

$$\delta x = -\cos\alpha_1, \quad \delta y = -\sin\alpha_1, \quad \delta v = -1, \quad \delta w = 0,$$

$$\delta\alpha_{\mu-1} = -\overline{\alpha}_\mu = -\alpha_\mu - e_{\mu,n}(\alpha_n - \alpha_n) \qquad (\mu = 2, 3, \ldots n),$$

$$\delta K = -\Phi - \sum_{\mu=2}^{n} A_\mu e_{\mu,n}(\overline{\alpha}_n - \alpha_n) = \Phi - \Phi_n(\overline{\alpha}_n - \alpha_n),$$

wenn die gestrichenen Buchstaben die auf $\bar{a}$, die ungestrichenen die auf a genommenen Werte der Ausdrücke im Punkte 3 bezeichnen.

Es wird nun nach (101), da a der Gleichung $G' = 0$ genügt:

$$\delta J_{03} = [\delta K]_{(0)}^{(3)} = -\Phi - \Phi_n(\overline{\alpha}_n - \alpha_n)$$

und

$$\begin{aligned} J_{043} - J_{03} &= J_{04} - J_{03} + J_{43} = \sigma\delta J_{03} + \overline{\Phi}\sigma + (\sigma)_2 \\ &= \sigma\left\{\overline{\Phi} - \Phi - \Phi_n(\overline{\alpha}_n - \alpha_n)\right\} + (\sigma)_2 \\ &= \varepsilon\frac{ds}{dt}\left\{\overline{\Phi} - \Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_n}(\overline{\alpha}_n - \alpha_n)\right\} + (\varepsilon)_2, \end{aligned}$$

wenn ε die Differenz der Werte bezeichnet, welche die unabhängige Variable t von $\bar{a}$ in 4 und in 3 annimmt, so dass:

$$\sigma = \frac{ds}{dt}\varepsilon + (\varepsilon)_2.$$

Es ergiebt sich also wieder:

$$E = \left\{\overline{\Phi} - \Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_n}(\overline{\alpha}_n - \alpha_n)\right\}\frac{ds}{dt}. \tag{91}$$

Vierter Abschnitt.

Aufstellung hinreichender Bedingungen.

Es sei 1 2 ein solches Stück einer Curve $\bar{a}$: $x = \bar{\varphi}(\lambda)$, $y = \bar{\psi}(\lambda)$, dass in seiner ganzen Ausdehnung $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2$ die Functionen $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ mit ihren Ableitungen bis zur mindestens n ten Ordnung stetig sind und nirgends $\bar{\varphi}'(\lambda)$ und $\bar{\psi}'(\lambda)$ gleichzeitig verschwinden.

Nun werde weiter vorausgesetzt, es gebe eine einfach unendliche stetige Schar U von particulären Lösungen u der Differentialgleichung des Problems:

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi(t, u) = \varphi(t; u_1, \ldots u_{2n}) \\
y &= \psi(t, u) = \psi(t; u_1, \ldots u_{2n}), \\
u_\nu &= u_\nu(\lambda) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots 2n),
\end{aligned} \tag{59}
$$

welche in einem festen Punkte 0 alle mit einander eine Berührung $n-1$ ter Ordnung eingehen und ausserdem die Curve $\bar{a}$ der Reihe nach in allen ihren Punkten 3 zwischen 1 und 2 von $n-1$ ter Ordnung berühren, zwischen 0 und 3 aber sich ebenfalls bis auf Ableitungen n ter Ordnung stetig verhalten.

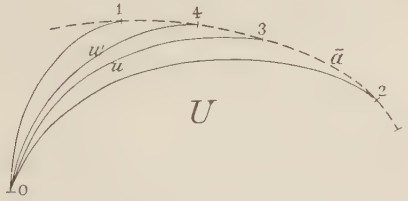

Fig. 5.

Es giebt dann für jeden Wert von λ des Intervalls eine solche Function $\lambda = \lambda(t) = \lambda(t; \lambda)$ und eine solche Function: $t_3' = t_3'(\lambda)$, dass wie in (60) und in der dort angegebenen Bedeutung für $t = t_3'$:

$$(103)\qquad \begin{aligned} D^{\mu}\overline{\varphi}(\lambda) &= \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3') = \varphi^{(\mu)}(t_3', u) \\ D^{\mu}\overline{\psi}(\lambda) &= \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3') = \psi^{(\mu)}(t_3', u) \\ (\mu &= 0, 1, \ldots n-1), \end{aligned}$$

während das zu $\lambda - \iota$ gehörige particuläre Integral u' die Curve u in 0 und $\bar{a}$ in 4 $[x = \overline{\varphi}(\lambda - \iota),\ y = \overline{\psi}(\lambda - \iota)]$ von $n-1$ ter Ordnung berührt, für $\iota = 0$ aber sich auf u reduciert, also allen im vorigen Abschnitte an a_ε gestellten Forderungen genügt. Daher ist die Formel (72) anwendbar und ergiebt, wenn die zusammengesetzten Integrale

$$J_{032} = J_{03} + J_{32} = S(\lambda), \qquad J_{042} = J_{04} + J_{42} = S(\lambda - \iota)$$

gesetzt werden,

$$S(\lambda - \iota) - S(\lambda) = J_{04} + J_{43} - J_{03}$$

$$= \frac{\iota}{\lambda'} E(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \overline{x}^{(n)}, \overline{y}^{(n)}) + (\iota)_2 = \frac{\iota}{\lambda'} E(\lambda) + (\iota)_2,$$

wo $$x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t_3', u), \quad y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t_3', u),$$

$$\overline{x}^{(n)} = D^n\overline{\varphi}(\lambda) = \overline{\varphi_1}^{(n)}(t_3'), \quad \overline{y}^{(n)} = D^n\overline{\psi}(\lambda) = \overline{\psi_1}^{(n)}(t_3')$$

anzunehmen ist. Es wird daher:

$$(104)\qquad S'(\lambda) = \lim_{\iota = 0} \frac{S(\lambda - \iota) - S(\lambda)}{-\iota} = -\frac{E(\lambda)}{\lambda'},$$

also durch Integration:

$$S(\lambda) - S(\lambda_2) = J_{032} - J_{02} = \int_{\lambda}^{\lambda_2} E(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda'},$$

$$(105)\quad J_{012} - J_{02} = J_{01} - J_{02} + J_{12} = S(\lambda_1) - S(\lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda'}.$$

Sind im besonderen Falle die Curvenstücke 0 1 und 0 2 Teile einer einzigen particulären Lösung a oder 0 1 2, welche von $\bar{a}$ in den Punkten 1 und 2 von $n-1$ ter Ordnung berührt wird, so ist wegen $J_{02} = J_{01} + J_{12}$ und $\lambda' > 0$:

$$(105a) \qquad \Delta J = \bar{J} - J = J(\bar{a}) - J(a) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda'} > 0,$$

wenn im ganzen Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ beständig $E(\lambda) > 0$ und nicht überall $E(\lambda) = 0$ ist.

Die Formel (105) mit der daran geknüpften Folgerung gilt auch dann noch, wenn $\varphi^{(n)}(\lambda)$, $\overline{\psi}^{(n)}(\lambda)$ in einzelnen Punkten des Intervalls endliche Sprünge erleiden, wie man sich durch Zerlegung von 1 2 in Teil-Intervalle leicht überzeugt, vorausgesetzt nur, dass die Ableitungen bis zur $n-1$ten Ordnung und mit ihnen die u_ν überall stetig bleiben, d. h. die Lösungen der Differentialgleichung stetig in einander übergehen. Sei nämlich z. B. 3 ein solcher Unstetigkeitspunkt, so wird, wenn er der einzige ist:

$$J_{01} + J_{13} - J_{03} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_3} E(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda'},$$

$$J_{03} + J_{32} - J_{02} = \int_{\lambda_3}^{\lambda_2} E(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda'},$$

also durch Addition:

$$J_{01} + J_{12} - J_{02} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda'}, \quad \text{q. e. d.}$$

Ganz analog verfährt man für mehrere Unstetigkeitspunkte. $\bar{a}$ braucht daher nur den Stetigkeitsbedingungen (33) und (34) zu genügen, und wir erhalten den Satz:

Satz VII. *Das über ein reguläres Stück 1 2 einer Curve a, die der Differentialgleichung des Problemes genügt, erstreckte Integral J besitzt einen grösseren Wert, als alle über solche erlaubten Variationen ā erstreckten Integrale $\bar{J}$, für welche eine Schar U von Lösungen der Differentialgleichung der betrachteten Art existiert und für welche immer $E(\lambda) \geqq 0$ und nicht beständig $= 0$ ist.*

Dieser Satz soll nun benutzt werden, um hinreichende Bedingungen für das Bestehen eines Minimums herzuleiten.

Zunächst handelt es sich um die Existenz einer solchen Schar U von particulären Lösungen der Differentialgleichung, wie sie oben vorausgesetzt wurde. Da die Curvenstücke 0 3, 3 4 und 0 4 als Teile der Curven u, $\bar{a}$ und u' in denselben Beziehungen zu einander stehen wie im vorigen Abschnitte als Teile von a, $\bar{a}$ und a_ε mit dem einzigen Unterschiede, dass jetzt auch $a_\varepsilon = u'$ eine Lösung der Differentialgleichung sein soll, so möge zunächst untersucht werden, *unter welchen Bedingungen eine Curve a_ε mit den in (60) bis (63) angegebenen Eigenschaften existiert, welche ausserdem noch gleichfalls der Differentialgleichung des Problemes genügt, also eine zu a „benachbarte Lösung" derselben darstellt.*

Nach (59) muss eine solche Curve, wenn sie existiert, von der Form sein:

$$(106)\qquad \begin{aligned} x &= \varphi(t, a+\omega) = \varphi(t; a_1+\omega_1, \ldots a_{2n}+\omega_{2n}) = \varphi_\varepsilon(t) \\ y &= \psi(t, a+\omega) = \psi(t; a_1+\omega_1, \ldots a_{2n}+\omega_{2n}) = \psi_\varepsilon(t) \end{aligned}$$

und für passend bestimmte Werte der Grössen

$$\tau_0^{(\mu)}(t_0) = \tau_0^{(\mu)}, \qquad \tau_3^{(\mu)}(t_3) = \tau_3^{(\mu)}, \qquad \omega_\nu$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots n-1; \quad \nu = 1, 2, \ldots 2n),$$

die mit ε gleichzeitig unendlich klein werden müssen, dem Gleichungs-Systeme (65) genügen, das sich jetzt in der Form schreiben lässt:

$$(107)\qquad \left|\begin{array}{ll} D^\mu[\varphi(t+\tau_0, a+\omega)-\varphi(t)] = 0 & \\ D^\mu[\psi(t+\tau_0, a+\omega)-\psi(t)] = 0 & (t=t_0) \\ D^\mu[\varphi(t+\tau_3, a+\omega)-\varphi(t)] = \xi_3^{(\mu)} & \\ D^\mu[\psi(t+\tau_3, a+\omega)-\psi(t)] = \eta_3^{(\mu)} & (t=t_3) \end{array}\right.$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots n-1),$$

wo wegen (60) auch die Grössen

$$(108)\qquad \begin{aligned} \xi_3^{(\mu)} &= \overline{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3-\varepsilon) - \varphi^{(\mu)}(t_3) = \overline{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3-\varepsilon) - \overline{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3), \\ \eta_3^{(\mu)} &= \overline{\psi}_1^{(\mu)}(t_3-\varepsilon) - \psi^{(\mu)}(t_3) = \overline{\psi}_1^{(\mu)}(t_3-\varepsilon) - \overline{\psi}_1^{(\mu)}(t_3) \end{aligned}$$

mit ε gleichzeitig unendlich klein werden.

Für hinreichend kleine $|\tau_0|$, $|\omega_\nu|$ aber gilt die Entwicklung:

$$\varphi(t+\tau_0, a+\omega) = \varphi'(t, a)\,\tau_0 + \sum_\nu \varphi_\nu(t, a)\,\omega_\nu + (\tau_0, \omega_\nu)_2$$

$$= \varphi'(t)\,\tau_0 + \sum_\nu \varphi_\nu(t)\,\omega_\nu + (\tau_0, \omega_\nu)_2.$$

Diese Potenzreihe kann man unter der Voraussetzung, dass $\tau_0 = \tau_0(t)$ in der Umgebung von $t = t_0$ den Charakter einer ganzen Function besitzt, gliedweise differentiiren, wobei die Dimension jedes Gliedes in Bezug auf die Gesamtheit der Grössen $\tau_0^{(\mu)}$, ω_ν ungeändert bleibt, und die so entstehenden Reihen werden für hinreichend kleine Beträge dieser Grössen in einem Bereiche $|t-t_0| < \delta$ unbedingt und gleichmässig convergieren und die Ableitungen der ursprünglichen Reihe darstellen. Behandelt man ebenso auch die anderen, durch Vertauschung von φ mit ψ oder von t_0 mit t_3 entstehenden Reihen, so lassen die Gleichungen (107) sich schreiben:

$$\begin{aligned}
&D^\mu[\varphi'(t)\,\tau_0]_{t_0} + \sum_\nu \varphi_\nu^{(\mu)}(t_0)\,\omega_\nu + (\tau_0^{(\mu)}, \omega_\nu)_2 = 0\\
&D^\mu[\psi'(t)\,\tau_0]_{t_0} + \sum_\nu \psi_\nu^{(\mu)}(t_0)\,\omega_\nu + (\tau_0^{(\mu)}, \omega_\nu)_2 = 0\\
&D^\mu[\varphi'(t)\,\tau_3]_{t_3} + \sum_\nu \varphi_\nu^{(\mu)}(t_3)\,\omega_\nu + (\tau_3^{(\mu)}, \omega_\nu)_2 = \xi_3^{(\mu)}\\
&D^\mu[\psi'(t)\,\tau_3]_{t_3} + \sum_\nu \psi_\nu^{(\mu)}(t_3)\,\omega_\nu + (\tau_3^{(\mu)}, \omega_\nu)_2 = \eta_3^{(\mu)}\\
&(\mu = 0, 1, \ldots n-1),
\end{aligned} \tag{107a}$$

wo nach der Leibnitzschen Formel

$$D^\mu[\varphi'(t)\,\tau_0]_{t_0} = \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu}{i} \varphi^{(\mu-i+1)}(t_0)\,\tau_0^{(i)} \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt werden kann. Nun lässt sich nach einem bekannten Satze der Functionen-Theorie die Auflösung dieser $4n$ Gleichungen nach den $4n$ Unbekannten $\tau_0^{(\mu)}$, $\tau_3^{(\mu)}$, ω_ν $(\mu = 0, 1, \ldots n-1;$ $\nu = 1, 2, \ldots 2n)$ für hinreichend kleine Beträge der $\xi_3^{(\mu)}$, $\eta_3^{(\mu)}$ durch Potenzreihen, die nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen fortschreiten und mit ihnen zugleich unendlich klein werden, auf eine einzige Weise immer ausführen, vorausgesetzt, dass

die Determinante, gebildet aus den Coefficienten der Glieder erster Dimension, nicht verschwindet, d. h. dass

$$(109) \qquad \Theta = \Theta(t_0, t_3) = \Theta(t_0, t_3; a)$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{\mu}{i}\varphi^{(\mu-i+1)}(t_0) & 0 & \varphi_\nu^{(\mu)}(t_0) & \varphi_{n+\nu}^{(\mu)}(t_0) \\ \binom{\mu}{i}\psi^{(\mu-i+1)}(t_0) & 0 & \psi_\nu^{(\mu)}(t_0) & \psi_{n+\nu}^{(\mu)}(t_0) \\ 0 & \binom{\mu}{i}\varphi^{(\mu-i+1)}(t_3) & \varphi_\nu^{(\mu)}(t_3) & \varphi_{n+\nu}^{(\mu)}(t_3) \\ 0 & \binom{\mu}{i}\psi^{(\mu-i+1)}(t_3) & \psi_\nu^{(\mu)}(t_3) & \psi_{n+\nu}^{(\mu)}(t_3) \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

wo die einzelnen Glieder immer ganze Systeme von je n^2 Elementen vertreten:

$$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1;\quad i,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots\ n.$$

Durch eine kleine Umformung des nach Fortlassung der Glieder höherer Dimension von (107a) übrig bleibenden Systemes lässt sich nun die Determinante auf eine übersichtlichere Form und auf den Grad $2n$ statt $4n$ reducieren. Dieses System nämlich lässt sich schreiben, indem man zugleich den Buchstaben μ durch i ersetzt:

$$(110) \qquad \begin{aligned} A_i) \quad & 0 = D^i\left[\varphi'\tau_0 + \textstyle\sum_\nu \varphi_\nu \omega_\nu\right]_0 \Big| \quad \binom{\mu}{i}\psi^{(\mu-i+1)}(t_0) \\ B_i) \quad & 0 = D^i\left[\psi'\tau_0 + \textstyle\sum_\nu \psi_\nu \omega_\nu\right]_0 \Big| \quad -\binom{\mu}{i}\varphi^{(\mu-i+1)}(t_0) \\ C_i) \quad & \xi_3^{(i)} = D^i\left[\varphi'\tau_3 + \textstyle\sum_\nu \varphi_\nu \omega_\nu\right]_3 \Big| \quad \binom{\mu}{i}\psi^{(\mu-i+1)}(t_3) \\ D_i) \quad & \eta_3^{(i)} = D^i\left[\psi'\tau_3 + \textstyle\sum_\nu \psi_\nu \omega_\nu\right]_3 \Big| \quad -\binom{\mu}{i}\varphi^{(\mu-i+1)}. \end{aligned}$$

Multipliciert man hier beide Seiten von $A_i)$ und ebenso von $B_i)$ mit den dahinter stehenden Factoren und summiert alle diese Producte über $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \mu$ und verfährt dann ebenso mit $C_i)$ und $D_i)$ und den zugehörigen Factoren, indem man zugleich die $\xi_3^{(i)}$, $\eta_3^{(i)}$, was man immer kann, als die successiven Ableitungen von Functionen $\xi_3(t)$ und $\eta_3(t)$ für $t = t_3$ auffasst und die Beziehungen

$$\sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu}{i} \psi^{(\mu-i+1)} D^i u = D^\mu (\psi' u) \quad \text{u. s. w.}$$

benutzt, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(111)\begin{cases} E_\mu) & 0 = D^\mu \left[\psi' \varphi' \tau_0 - \varphi' \psi' \tau_0 + \sum_\nu (\psi' \varphi_\nu - \varphi' \psi_\nu) \omega_\nu \right]_0, \\ F_\mu) & D^\mu [\psi' \xi_3 - \varphi' \eta_3]_3 \\ & \quad = D^\mu \left[\psi' \varphi' \tau_3 - \varphi' \psi' \tau_3 + \sum_\nu (\psi' \varphi_\nu - \varphi' \psi_\nu) \omega_\nu \right]_3 \end{cases}$$

oder, durch Einführung der Bezeichnungen:

$$w^{(\mu)} = D^\mu [\psi' \xi_3 - \varphi' \eta_3]_{t_3}, \quad w_\nu(t) = \psi'(t) \varphi_\nu(t) - \varphi'(t) \psi_\nu(t),$$

$$(111\,a)\qquad \begin{aligned} E_\mu) \quad & 0 = \sum_\nu w_\nu^{(\mu)}(t_0)\, \omega_\nu \\ F_\mu) \quad & w^{(\mu)} = \sum_\nu w_\nu^{(\mu)}(t_3)\, \omega_\nu. \end{aligned}$$

Für den Fall $\psi'(t_0) \gtrless 0$ wird durch dieses Verfahren die Gleichung $A_\mu)$, die nur den Factor $\psi'(t_0)$ erhält, durch Hinzufügung der vorhergehenden $A_i)$ $(i < \mu)$ sowie der $B_i)$ mit ihren Factoren, ersetzt werden durch $E_\mu)$, wobei die Determinante sich nur mit $\psi'(t_0)$ multipliciert; ist aber $\varphi'(t_0) \gtrless 0$, was nach unseren Voraussetzungen notwendig eintreten müsste für $\psi'(t_0) = 0$, so wird statt dessen ganz analog $B_\mu)$ ersetzt werden durch $E_\mu)$, wobei die Determinante sich mit $-\varphi'(t_0)$ multipliciert. Ebenso kann $C_\mu)$ oder $D_\mu)$ durch $F_\mu)$ ersetzt werden, je nachdem $\psi'(t_3)$ oder $\varphi'(t_3)$ von 0 verschieden ist, und die Determinante ändert sich dabei um den Factor $\psi'(t_3)$ oder $-\varphi'(t_3)$. Wird dieses Verfahren successive angewandt für $\mu = n-1, n-2, \ldots 2, 1, 0$, wobei immer wegen $i \leq \mu$ die einmal umgeformten Gleichungen $A_\mu)$, $B_\mu)$, $C_\mu)$, $D_\mu)$ niemals zum zweiten Male verwendet werden, so wird im Falle $\psi'(t_0) \gtrless 0$, $\psi'(t_3) \gtrless 0$ das ganze System

$$A_\mu),\ B_\mu),\ C_\mu),\ D_\mu)$$

ersetzt werden durch: $E_\mu),\ B_\mu),\ F_\mu),\ D_\mu)$

mit der neuen Determinante:

$$= \pm \psi'(t_0)^n \psi'(t_3)^n \Theta(t_0, t_3)$$

und analog in den übrigen Fällen. Da aber E_μ) und F_μ) die Unbekannten $\tau_0^{(i)}$, $\tau_3^{(i)}$ gar nicht mehr enthalten und $\tau_0^{(i)}$ nur noch in B_μ), $\tau_3^{(i)}$ nur noch in D_μ) erscheint, so zerfällt die neue Determinante in ein Product:

$$\pm \Theta\, \psi'(t_0)^n\, \psi'(t_3)^n$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_\nu^{(\mu)}(t_0) & w_{n+\nu}^{(\mu)}(t_0) \\ \binom{\mu}{i}\psi^{(\mu-i+1)}(t_0) & 0 & \psi_\nu^{(\mu)}(t_0) & \psi_{n+\nu}^{(\mu)}(t_0) \\ 0 & 0 & w_\nu^{(\mu)}(t_3) & w_{n+\nu}^{(\mu)}(t_3) \\ 0 & \binom{\mu}{i}\psi^{(\mu-i+1)}(t_3) & \psi_\nu^{(\mu)}(t_3) & \psi_{n+\nu}^{(\mu)}(t_3) \end{vmatrix}$$

$$= \pm \left| \binom{\mu}{i}\psi^{(\mu-i+1)}(t_0) \right| \cdot \left| \binom{\mu}{i}\psi^{(\mu-i+1)}(t_3) \right| \cdot \begin{vmatrix} w_\nu^{(\mu)}(t_0) & w_{n+\nu}^{(\mu)}(t_0) \\ w_\nu^{(\mu)}(t_3) & w_{n+\nu}^{(\mu)}(t_3) \end{vmatrix},$$

wo die beiden Determinanten $n$ten Grades sich wegen $\binom{\mu}{i} = 0 \quad (\mu < i)$ auf ihre Diagonalglieder $\psi'(t_0)^n$ und $\psi'(t_3)^n$ reducieren und sich gegen die Factoren links aufheben, so dass schliesslich:

$$\Theta(t_0, t_3; a) = \pm \left| w_\nu^{(\mu)}(t_0) \;\; w_\nu^{(\mu)}(t_3) \right| \tag{112}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots n-1; \quad \nu = 1, 2, \ldots 2n),$$

wo zuletzt ν den Colonnenindex und jedes hingeschriebene Glied das System von n $2n$gliedrigen Colonnen bedeutet, und

$$w_\nu(t) = \psi'(t)\, \varphi_\nu(t) - \varphi'(t)\, \psi_\nu(t).$$

Dieselbe Formel (112) ergiebt sich auf ganz analogem Wege, wenn eine der Grössen $\psi'(t_0)$ und $\psi'(t_3)$ verschwindet und dafür sicher $\varphi'(t_0)$ oder $\varphi'(t_3)$ von Null verschieden ist.

Wir können immer annehmen, dass $\Theta(t_0, t)$ nicht für alle Werte t eines endlichen Intervalles und daher, wenn F und somit auch φ, ψ, Θ als „analytische“ Functionen vorausgesetzt werden, für das ganze particuläre Integral a der Differentialgleichung beständig verschwindet. Sonst müsste es nämlich $2n$ Constanten $\omega_1, \ldots \omega_{2n}$ geben, für welche überall

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \omega_\nu w_\nu(t) = 0$$

wird, falls nicht alle Determinanten $n$ten Grades des Systemes $w_\nu^{(\mu)}(t_0)$ $(\mu = 0, 1, \ldots n-1;\ \nu = 1, 2, \ldots 2n)$ verschwinden. Diesen Ausnahmefall kann man aber vermeiden, indem man t_0 durch einen beliebig nahen Punkt t_0' ersetzt, oder es müssten alle diese Determinanten $|w_\nu^{(\mu)}(t)|$ in einem ganzen Intervall verschwinden, und daraus folgte dann wieder eine Relation der behaupteten Form. Es wäre also immer:

$$\Sigma_\nu \omega_\nu \left(\psi'(t)\, \varphi_\nu(t) - \varphi'(t)\, \psi_\nu(t)\right)$$

$$= \psi'(t)\, \Sigma_\nu \varphi_\nu(t)\, \omega_\nu - \varphi'(t)\, \Sigma_\nu \psi_\nu(t)\, \omega_\nu = 0.$$

Da aber hier nirgends die $\varphi_\nu(t)$, $\psi_\nu(t)$ unendlich werden oder die $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ gleichzeitig verschwinden sollen, so wird die Function:

$$\frac{\Sigma_\nu \varphi_\nu(t)\, \omega_\nu}{\varphi'(t)} = \frac{\Sigma_\nu \psi_\nu(t)\, \omega_\nu}{\psi'(t)} = \tau(t)$$

im ganzen Intervall endlich bleiben, so dass man schreiben kann:

$$\varphi(t, a + \varepsilon\omega) = \varphi(t) + \varepsilon \Sigma_\nu \varphi_\nu(t)\, \omega_\nu + (\varepsilon)_2$$

$$= \varphi(t) + \varepsilon\tau\varphi'(t) + (\varepsilon)_2 = \varphi(t + \varepsilon\tau) + (\varepsilon)_2,$$

$$\psi(t, a + \varepsilon\omega) = \psi(t) + \varepsilon\tau\psi'(t) + (\varepsilon)_2 = \psi(t + \varepsilon\tau) + (\varepsilon)_2.$$

Nun ist aber der Ansatz

$$x = \varphi(t + \varepsilon\tau), \qquad y = \psi(t + \varepsilon\tau)$$

nur eine andere Darstellung der Curve a:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

es gäbe also eine durch $u_\nu = a_\nu + \varepsilon\omega_\nu$ charakterisierte Lösung der Differentialgleichung, die sich für kleine ε von a selbst nur um Glieder höherer Dimension unterschiede, oder, anders ausgedrückt: in a fielen zwei unendlich benachbarte Lösungen der Differentialgleichung zusammen, a wäre also eine singuläre Curve aus der Schar der Integrale und müsste besonders untersucht werden.

Schliessen wir diesen Fall aus, so muss die Gleichung

$\Theta(t_0, t; a) = 0$, wenn sie überhaupt bestehen kann, eine kleinste Wurzel $t = t_0' > t_0$ besitzen. Dann mögen nach der Bezeichnung des Herrn Prof. Weierstrass die beiden durch $t = t_0$ und $t = t_0'$ definierten Stellen der Curve zwei „auf a conjugierte Punkte“ genannt werden.

Für ein solches Paar conjugierter Punkte $t_0, t_3 = t_0'$ müssen sich wegen $\Theta = 0$ die linearen Gleichungen (110) befriedigen lassen für $\xi_3^{(\mu)} = 0$, $\eta_3^{(\mu)} = 0$, so dass für gewisse Werte der Grössen $\tau_0^{(\mu)}, \tau_3^{(\mu)}, \omega_\nu$, die nicht sämtlich verschwinden, die Gleichungen (107) die Form annehmen:

$$
\begin{aligned}
D^\mu \left[\varphi\,(t + \varepsilon\,\tau_0,\ a + \varepsilon\,\omega)\right]_{t_0} &= \varphi^{(\mu)}(t_0) + (\varepsilon)_2 \\
D^\mu \left[\psi\,(t + \varepsilon\,\tau_0,\ a + \varepsilon\,\omega)\right]_{t_0} &= \psi^{(\mu)}(t_0) + (\varepsilon)_2 \\
D^\mu \left[\varphi\,(t + \varepsilon\,\tau_3,\ a + \varepsilon\,\omega)\right]_{t_3} &= \varphi^{(\mu)}(t_3) + (\varepsilon)_2 \\
D^\mu \left[\psi\,(t + \varepsilon\,\tau_3,\ a + \varepsilon\,\omega)\right]_{t_3} &= \psi^{(\mu)}(t_3) + (\varepsilon)_2
\end{aligned}
\tag{113}
$$

$$(\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1)$$

für beliebig kleine ε, die unter einer gewissen Grenze liegen. Dann ist nach (21) auch für alle „Osculations-Invarianten“ $\Phi\left(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)}\right)$ bis zur $n-1$ ten Ordnung:

$$
\begin{aligned}
&\Phi\left(\varphi^{(\mu)}(t_0 + \varepsilon\,\tau_0,\ a + \varepsilon\,\omega),\ \psi^{(\mu)}(t_0 + \varepsilon\,\tau_0,\ a + \varepsilon\,\omega)\right) \\
&\qquad = \Phi\left(\varphi^{(\mu)}(t_0),\ \psi^{(\mu)}(t_0)\right) + (\varepsilon)_2 \\
&\Phi\left(\varphi^{(\mu)}(t_3 + \varepsilon\,\tau_3,\ a + \varepsilon\,\omega),\ \psi^{(\mu)}(t_3 + \varepsilon\,\tau_3,\ a + \varepsilon\,\omega)\right) \\
&\qquad = \Phi\left(\varphi^{(\mu)}(t_3),\ \psi^{(\mu)}(t_3)\right) + (\varepsilon)_2,
\end{aligned}
\tag{113a}
$$

was man so ausdrücken kann: es giebt eine zu a unendlich benachbarte Lösung der Differentialgleichung des Problems ($u_\nu = a_\nu + \varepsilon\,\omega_\nu$ für ein unendlich kleines ε), welche a in den beiden Punkten $t = t_0$ und $t = t_3$ von $n-1$ter Ordnung berührt, eine Eigenschaft, die als Definition der „conjugierten Punkte“ angesehen werden kann, wenn sie in dem hier entwickelten Sinne verstanden wird. Oft giebt es wirklich eine Schar von reellen Lösungen u, die sich an a beliebig eng anschliessen und diese Curve ausser in 0 immer noch in einem zweiten Punkte 3 von $n-1$ter Ordnung berühren, dann wird die Grenzlage dieser

Punkte 3, wenn man u mit a zusammenfallen lässt, durch den zu 0 „conjugierten“ Punkt 0′ dargestellt. Doch braucht dieses Verhalten nicht für jedes Paar conjugierter Punkte stattzufinden, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Auch die ursprünglichste und gebräuchlichste Definition der „conjugierten Punkte“ durch die Existenz gewisser Integrale einer linearen Differentialgleichung ($\partial G = 0$) soll hier ausser Betracht bleiben, da sie für die vorliegende Untersuchung ohne wesentliche Bedeutung ist.

Sind nun 0 und 3 nicht zwei auf a conjugierte Punkte, also

$$\pm \Theta(t_0, t_3; a) > \zeta > 0, \tag{114}$$

so kann man positive Grössen g'_μ so klein angeben, dass für

$$|\xi_3^{(\mu)}| < g'_\mu, \quad |\eta_3^{(\mu)}| < g'_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n-1) \tag{115}$$

die Gleichungen (107) in der dort angegebenen Weise durch Potenzreihen-Entwicklung nach den Unbekannten $\tau_0^{(\mu)}$, $\tau_3^{(\mu)}$, ω_ν aufgelöst werden können, während die Beträge dieser Grössen mit den g'_μ gleichzeitig unendlich klein werden. Das so gefundene Werte-System ist aber auch die einzige Lösung, für welche die Beträge der Unbekannten unter eine gewisse Grenze α' fallen, ja die einzige, für welche nur $|\omega_\nu| < \alpha \leqq \alpha'$ $(\nu = 1, 2, \ldots 2n)$ sein soll, ohne dass die $\tau_0^{(\mu)}$, $\tau_3^{(\mu)}$ von vorn herein irgendwelchen Beschränkungen unterworfen würden. Denn den Bemerkungen von (63) zufolge können allein durch hinreichende Verkleinerung der g'_μ und ω_ν, oder der g'_μ und α auch die $|\tau_0^{(\mu)}|$, $|\tau_3^{(\mu)}|$ immer beliebig klein, also auch $< \alpha'$ gemacht werden, vorausgesetzt, dass a sich im betrachteten Intervall nicht selbst durchschneidet. Lässt man jetzt t_3 das Intervall $t_1 \leqq t_3 < t_2$ durchlaufen, in welchem alle unsere Voraussetzungen ausnahmslos gültig sind, so können die zu den einzelnen Punkten t_3 gehörigen ζ durch ihre constante untere Grenze und ebenso die g'_μ und α durch ihre oberen Grenzen im Intervall ersetzt werden.

Die hier entwickelte Auflösung der Gleichungen (107) ist immer anwendbar, wenn die $\xi_3^{(\mu)}$, $\eta_3^{(\mu)}$ beliebige Grössen sind, die den Bedingungen (115) genügen. Haben sie aber die Bedeutung (108)

$$\xi_3^{(\mu)} = \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) - \overline{\varphi_1}^{(\mu)}(t_3), \quad \eta_3^{(\mu)} = \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3 - \varepsilon) - \overline{\psi_1}^{(\mu)}(t_3),$$

so kann (115) und damit auch (107) für ein hinreichend kleines positives ε_0 durch $\varepsilon < \varepsilon_0$ immer befriedigt werden.

Dann giebt es eine eindeutig bestimmte und an a sich stetig anschliessende Schar U von Lösungen der Differentialgleichungen $G = 0$, welche für das Stück der Curve $\bar{a}$ vom Punkte 3 an bis 4 die Coordinaten:

$$x = \overline{\varphi}_1(t_3 - \varepsilon) = \overline{\varphi}(\lambda - \iota), \qquad y = \overline{\psi}_1(t_3 - \varepsilon) = \overline{\psi}(\lambda - \iota)$$

und die im Anfang des Abschnittes geforderten Eigenschaften besitzt.

Dieselben Betrachtungen wie für a gelten auch für jede andere Lösung u der Differentialgleichung, $x = \varphi(t, u)$, $y = \psi(t, u)$, welche denselben Bedingungen wie a genügt. So lange also $\Theta(t_0', t_3', u) \gtrless 0$ bleibt, wenn mit t_0' und t_3' die zu den Endpunkten 0 und 3 gehörigen Werte von t bezeichnet werden, und die Curven u fortfahren, sich zwischen 0 und 3 in der angegebenen Weise regulär zu verhalten, kann die Schar U, und zwar nur auf eine einzige Weise, längs der Curve $\bar{a}$ stetig fortgesetzt werden. Die zu 0 „conjugierten“ Punkte 3 der Curven u, in denen die eindeutige stetige Fortsetzung der Schar im allgemeinen ein Ende findet, und nach dem Früheren zwei unendlich benachbarte u einander von $n-1$ ter Ordnung berühren, können als „Verzweigungsstellen“ der Schar U aufgefasst werden.

Von der Curve a werde nun vorausgesetzt, dass sie sich im Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$ (einschliesslich der Grenzen) regulär verhalte und keinen zum Anfangspunkt $t = t_1$ conjugierten Punkt $t = t'_1 \leqq t_2$ besitze, so dass die Determinante $\Theta(t_1, t)$ immer von Null verschieden ist für $t_1 < t \leqq t_2$ und nur für $t = t_1$ verschwindet. Dann kann aber wegen der Stetigkeit der Function $\Theta(t', t'')$ immer eine Grösse $t_0 < t_1$ so nahe an t_1 und damit auf a ein Punkt 0 so nahe vor 1 angenommen werden, dass das reguläre Verhalten von a sich auch auf das grössere Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_2$ erstreckt, gleichzeitig aber $\Theta(t_0, t)$ im ganzen Intervall $t_1 \ldots t_2$ nirgends, auch an keiner der Grenzen mehr, verschwindet, der absolute Betrag also eine positive untere Grenze ζ besitzt:

$$(116) \qquad |\Theta(t_0, t)| > \zeta > 0 \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2).$$

Mithin können nach den früheren Betrachtungen positive Con-

stanten α, g'_μ so klein angenommen werden, dass die Gleichungen (107) unter den Bedingungen (115) für $t_1 \leqq t_3 \leqq t_2$ immer und nur auf eine einzige Weise durch Werte der Unbekannten $\tau_0^{(\mu)}$, $\tau_3^{(\mu)}$, ω_ν mit der Nebenbedingung $|\omega_\nu| < \alpha$ befriedigt werden, dass ferner die Curven $x = \varphi(t, a + \omega)$, $y = \psi(t, a + \omega)$ für $t_0 + \tau_0 \leqq t \leqq t_3 + \tau_3$ sich ebenso wie a regulär verhalten und dass endlich immer

$$(117) \qquad \pm \Theta(t_0 + \tau_0, t_3 + \tau_3; a + \omega) > 0$$

wird. Diese Gleichungen (107) können für:

$$\xi_3^{(\mu)} = D^\mu \bar{\varphi}(\lambda) - \varphi^{(\mu)}(t_3), \quad \eta_3^{(\mu)} = D^\mu \bar{\psi}(\lambda) - \psi^{(\mu)}(t_3),$$

also nach (115) für:

$$(118) \qquad \begin{aligned} |D^\mu \bar{\varphi}(\lambda) - \varphi^{(\mu)}(t_3)| &< g_\mu \leqq g'_\mu \\ |D^\mu \bar{\psi}(\lambda) - \psi^{(\mu)}(t_3)| &< g_\mu \leqq g'_\mu \\ (\mu = 0, 1, \ldots n-1) & \qquad [\text{vergl. (37)}] \end{aligned}$$

in der Form geschrieben werden:

$$(119) \qquad \begin{aligned} [D^\mu \varphi(t + \tau_0, a + \omega)]_{t_0} &= \varphi^{(\mu)}(t_0) \\ [D^\mu \psi(t + \tau_0, a + \omega)]_{t_0} &= \psi^{(\mu)}(t_0) \\ [D^\mu \varphi(t + \tau_3, a + \omega)]_{t_3} &= D^\mu \bar{\varphi}(\lambda) \\ [D^\mu \psi(t + \tau_3, a + \omega)]_{t_3} &= D^\mu \bar{\psi}(\lambda) \\ (\mu = 0, 1, \ldots n-1), & \end{aligned}$$

wo alle Bezeichnungen ihre früheren Bedeutungen haben. Dann drücken sie aus, dass das particuläre Integral u:

$$x = \varphi(t, a + \omega), \quad y = \psi(t, a + \omega),$$

einerseits mit a im Punkte 0 $(x = \varphi(t_0), y = \psi(t_0))$, andrerseits aber im Punkte 3:

$$x = \varphi(t_3 + \tau_3, a + \omega), \quad y = \psi(t_3 + \tau_3, a + \omega),$$

mit einer zweiten Curve $\bar{a}$ $(x = \bar{\varphi}(\lambda), y = \bar{\psi}(\lambda))$ eine Berührung von $n - 1$ter Ordnung eingeht. Wenn also $\bar{a}$ im ganzen Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ überall für passende Werte der t_3 zwischen t_1 und t_2

den Bedingungen (118) in der Bedeutung von (37) genügt, so bilden die so bestimmten Curven u eine Schar U mit den sämtlichen im Anfang des Abschnittes geforderten Eigenschaften. Denn sie müssen sich auch stetig an einanderschliessen, weil die Auflösung der Gleichungen (119) unter der Bedingung $|\omega_\nu| < \alpha$ eine eindeutige ist und daher die „stetige Fortsetzung" der Schar, die wegen (117) immer möglich ist, niemals zu anderen Ergebnissen führen kann.

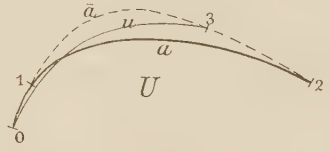

Fig. 6.

Wenn ferner die Curven $\bar{a}$ und a in den Endpunkten 1 und 2 einander von $n-1$ ter Ordnung berühren, so müssen auf Grund derselben Eindeutigkeit die zu diesen Endpunkten gehörigen Curven u mit a selbst zusammenfallen, sodass nunmehr der Satz VII angewandt werden kann.

Ist nämlich gleichzeitig für ein constantes positives ϱ beständig

$$E_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) > \varrho > 0 \tag{120}$$

$$(x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t),\ y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t),\ t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

und für willkürliche Werte der Variablen $\bar{x}^{(n)}$, $\bar{y}^{(n)}$, wo E_1 die Bedeutung (78) besitzt, so können in (118) oder in (37) die Constanten g_μ so klein gewählt werden, dass auch immer

$$E_1(\lambda) = E_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) > 0$$

und somit auch $E(\lambda) = E(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) \geqq 0$

ist für:

$$x^{(\mu)} = D^\mu \varphi(t+\tau_3,\ a+\omega)_{t_3}, \quad y^{(\mu)} = D^\mu \psi(t+\tau_3,\ a+\omega)_{t_3}$$

in der Bedeutung (119) und für beliebige $\bar{x}^{(n)}$, $\bar{y}^{(n)}$, so dass nach VII dem Stück 1 2 von a ein wirkliches Minimum des Integrales in einer „Nachbarschaft $n-1$ ter Ordnung" entspricht.

Ist aber statt dessen nur beständig

$$F_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) > \varrho > 0 \tag{121}$$

$$(x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t), \quad y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2),$$

F_1 in der Bedeutung (19) genommen, so können durch Hinzufügung der neuen Bedingungen

$$\begin{aligned} |D^n\bar{\varphi}(\lambda) - \varphi^{(n)}(t_3)| &< g_n \\ |D^n\bar{\psi}(\lambda) - \psi^{(n)}(t_3)| &< g_n \end{aligned} \tag{118}_n$$

auch die Grössen

$$|\bar{x}^{(n)} - x^{(n)}| = |D^n\bar{\varphi}(\lambda) - D^n\varphi(t+\tau_3, a+\omega)_{t_3}| < g'_n,$$

$$|\bar{y}^{(n)} - y^{(n)}| = |D^n\bar{\psi}(\lambda) - D^n\psi(t+\tau_3, a+\omega)_{t_3}| < g'_n$$

so klein gemacht werden, dass nach (78) wieder

$$E_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) > 0 \qquad \text{wird für}$$

$$x^{(\mu)} = D^\mu\varphi(t+\tau_3, a+\omega)_{t_3}, \quad y^{(\mu)} = D^\mu\psi(t+\tau_3, a+\omega)_{t_3}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots n) \quad \text{und} \quad \bar{x}^{(n)} = D^n\bar{\varphi}(\lambda), \quad \bar{y}^{(n)} = D^n\bar{\psi}(\lambda),$$

dass also auch $E(\lambda) \geq 0$ wird und somit a wieder ein Minimum des Integrales liefert, jetzt aber in einer „Nachbarschaft $n$ter Ordnung“.

Die aus (120) und (121) gezogenen Schlussfolgerungen bleiben gültig, wenn hier die positive Grösse ϱ durch 0 ersetzt wird, d. h. auch wenn E_1 oder F_1 in einzelnen Punkten von a verschwindet, ohne jedoch, als Function von $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ betrachtet, an einer dieser Stellen sein Vorzeichen zu wechseln, also auch für alle Werte-Combinationen der Umgebung immer positiv bleibt.

Dagegen ist noch zu untersuchen, ob nicht der andere Factor $(k - k)^2$ von E in (78) und damit auch E selbst auf a beständig verschwinden könne; dann würde nämlich $J(a) = J(a)$ werden, weshalb auch dieser Fall im Satze VII ausdrücklich ausgeschlossen wurde. Es wird sich aber zeigen, dass er unter den bereits gemachten Voraussetzungen nur für a selbst eintritt.

Ist nämlich in (78)

$$\bar{k} - k = y'(\bar{x}^{(n)} - x^{(n)}) - x'(\bar{y}^{(n)} - y^{(n)}) = 0, \tag{122}$$

so ist wegen $x'^2 + y'^2 > 0$

$$\frac{\bar{x}^{(n)} - x^{(n)}}{x'} = \frac{\bar{y}^{(n)} - y^{(n)}}{y'} = h$$

eine endliche Grösse, und daher ausser (119) noch:

$$x^{(n)} = D^n \varphi(t + \tau_3, a + \omega)_{t_3} = \bar{x}^{(n)} - h x' = D^n \bar{\varphi}(\lambda),$$

$$y^{(n)} = D^n \psi(t + \tau_3, a + \omega)_{t_3} = \bar{y}^{(n)} - h y' = D^n \bar{\psi}(\lambda),$$

wenn gemäss den Bemerkungen von S. 56 die in (119) gar nicht vorkommende und in Bezug auf den Wert von E willkürliche Grösse $\lambda^{(n)}$ durch $\lambda^{(n)} - h\lambda'$ ersetzt wird. Das heisst aber: Die beiden Curven $\bar{a}$ und u gehen im Punkte 3 eine Berührung von $n$ter statt nur von n—1ter Ordnung mit einander ein.

Dann kann die Curve $\bar{a}$ in der Umgebung des Berührungspunktes 3 ($t = t_3'$) in der Form ausgedrückt werden:

$$x = \bar{\varphi}_1(t), \quad y = \bar{\psi}_1(t), \quad \text{so dass}$$

$$\bar{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3') = \varphi^{(\mu)}(t_3', u), \quad \bar{\psi}_1^{(\mu)}(t_3') = \psi^{(\mu)}(t_3', u) \tag{123}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots n).$$

Da aber nach (117) auf $\bar{a}$ auch immer $|\Theta(t_0', t_3'; u)| > 0$ angenommen werden kann, wo der Wert t_0' zum Punkte 0 gehört, so sind auch die Formeln (107) der „stetigen Fortsetzung" der Schar U hier anwendbar, wenn jetzt die constanten Grössen a_ν, t_0, t_3 durch die variablen u_ν, t_0', t_3' ersetzt werden, so dass mit Rücksicht auf (123) für geeignete Werte der Grössen $\tau_0^{(\mu)}$, $\tau_3^{(\mu)}$, ω_ν:

$$\begin{aligned}
&D^\mu \left[\varphi(t + \tau_0, u + \omega) - \varphi(t)\right]_{t_0'} = 0 \\
&D^\mu \left[\psi(t + \tau_0, u + \omega) - \psi(t)\right]_{t_0'} = 0 \\
&D^\mu \left[\varphi(t + \tau_3, u + \omega) - \varphi(t)\right]_{t_3'} = \bar{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3' + \varepsilon) - \bar{\varphi}_1^{(\mu)}(t_3') \\
&D^\mu \left[\psi(t + \tau_3, u + \omega) - \psi(t)\right]_{t_3'} = \bar{\psi}_1^{(\mu)}(t_3' + \varepsilon) - \bar{\psi}_1^{(\mu)}(t_3')
\end{aligned} \tag{124}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots n - 1),$$

oder, wenn man für kleine $|\varepsilon|$ setzt:

$$\omega_\nu = \varepsilon\,\bar{\omega}_\nu + (\varepsilon)_2, \quad \tau_0^{(\mu)} = \varepsilon\,\bar{\tau}_0^{(\mu)} + (\varepsilon)_2, \quad \tau_3^{(\mu)} = \varepsilon\,\bar{\tau}_3^{(\mu)} + (\varepsilon)_2,$$

gemäss (107a) beiderseits nach Potenzen von ε entwickelt und die Coefficienten von ε^1 einander gleich setzt:

$$\begin{aligned}
&D^\mu\left[\varphi'(t,u)\,\bar{\tau}_0 + \Sigma_\nu\,\varphi_\nu(t,u)\,\bar{\omega}_\nu\right]_{t_0'} = 0\\
&D^\mu\left[\psi'(t,u)\,\bar{\tau}_0 + \Sigma_\nu\,\psi_\nu(t,u)\,\bar{\omega}_\nu\right]_{t_0'} = 0\\
&D^\mu\left[\varphi'(t,u)\,\bar{\tau}_3 + \Sigma_\nu\,\varphi_\nu(t,u)\,\bar{\omega}_\nu\right]_{t_3'} = \bar{\varphi}_1^{(\mu+1)}(t_3')\\
&D^\mu\left[\psi'(t,u)\,\bar{\tau}_3 + \Sigma_\nu\,\psi_\nu(t,u)\,\bar{\omega}_\nu\right]_{t_3'} = \bar{\psi}_1^{(\mu+1)}(t_3')
\end{aligned} \tag{124a}$$

$$(\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1),$$

wo wegen (123):

$$\bar{\varphi}_1^{(\mu+1)}(t_3') = \varphi^{(\mu+1)}(t_3', u) = D^\mu\varphi'(t,u)_{t_3'},$$

$$\bar{\psi}_1^{(\mu+1)}(t_3') = \psi^{(\mu+1)}(t_3', u) = D^\mu\psi'(t,u)_{t_3'},$$

die beiden letzten Zeilen in der Form geschrieben werden können:

$$D^\mu\left[\varphi'(t,u)\,(\bar{\tau}_3 - 1) + \Sigma_\nu\,\varphi_\nu(t,u)\,\bar{\omega}_\nu\right]_{t_3'} = 0$$

$$D^\mu\left[\psi'(t,u)\,(\bar{\tau}_3 - 1) + \Sigma_\nu\,\psi_\nu(t,u)\,\bar{\omega}_\nu\right]_{t_3'} = 0$$

Dieses System (124a) von $4n$ linearen und homogenen Gleichungen mit den $4n$ Unbekannten: $\bar{\omega}_\nu$, $\bar{\tau}_0^{(\mu)}$, $\bar{\tau}_3^{(\mu)} - e_{\mu,0}$ kann aber nur bestehen, wenn entweder die Determinante $\Theta(t_0', t_3'; u) = 0$ ist, oder die Unbekannten sämtlich verschwinden. Da hier das erste ausgeschlossen ist, so muss

$$\bar{\omega}_\nu = \lim_{\varepsilon=0}\frac{\omega_\nu}{\varepsilon} = \left(\frac{du_\nu}{dt}\right)_{t_3'} = \lambda'\left(\frac{du_\nu}{d\lambda}\right)_3 = 0$$

sein für $\nu = 1,\ 2,\ \ldots\ 2n$.

Sollte dies aber für ein endliches Stück von $\bar{a}$ überall stattfinden, so müsste $u_\nu = \text{const.}$ sein, d. h. dieser Teil von $\bar{a}$ fiele wegen (123) mit einer particulären Lösung u der Differentialgleichung, mit einem Individuum der Schar U, vollständig zusammen, also mit a selbst, wenn $\bar{a}$ diese Eigenschaft (122) in seiner ganzen Ausdehnung zwischen 1 und 2 besitzen soll. Für andere Curven $\bar{a}$ unserer „Nachbarschaft“ ausser a ist also diese Annahme mit unseren Voraussetzungen unverträglich, q. e. d.

Wir sind daher zur Aufstellung des folgenden Satzes berechtigt:

Satz VIII. *Eine particuläre Lösung a der Differentialgleichung des Problems:* $x = \varphi(t) = \varphi(t, a)$, $y = \psi(t) = \psi(t, a)$, *für welche zwischen den Punkten 1 und 2, d. h. im Intervall* $t_1 \leqq t \leqq t_2$ *die Functionen* $\varphi^{(\mu)}(t)$, $\psi^{(\mu)}(t)$, *sowie auch* $\varphi_\nu^{(\mu)}(t)$, $\psi_\nu^{(\mu)}(t)$ $(\mu = 0, 1, .. n;$ $\nu = 1, 2, \ldots 2n)$ *eindeutig, endlich und stetig sind,* $\varphi'(t)$ *und* $\psi'(t)$ *niemals gleichzeitig verschwinden und endlich die Function* $\Theta(t_1, t; a)$ [*cf.* (109) *und* (112)] *überall von 0 verschieden ist, liefert nach der Definition des zweiten Abschnittes und für* $r = n - 1$ *in* (34) *ein wirkliches Minimum des Integrales*

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})\, dt$$

1. in einer Nachbarschaft $m = n-1$*ter Ordnung* [*cf.* (37)], *wenn gleichzeitig die Function* $E(t) = E(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)})$ *in der Bedeutung* (73) *und* (78) *für* $x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t)$, $y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t)$ *und für beliebige Werte der* $\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}$ *im ganzen Intervall nur positive Werte besitzt und auch an den Stellen, wo sie etwa verschwindet, ihr Vorzeichen nicht wechseln kann;*

2. in einer Nachbarschaft $m = n$*ter Ordnung, wenn statt dessen die Function* $F_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)})$ *für* $x^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(t)$, $y^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}(t)$ *im ganzen Intervall nur positiv ist und, auch wo sie verschwindet, ihr Zeichen nicht wechseln kann.*

In den Sätzen V und VI wurde die Erfüllung der Bedingungen (77) $E(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}; \bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) \geqq 0$ und (80) $F_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) \geqq 0$ in der ganzen Ausdehnung von a als notwendig für das Bestehen eines Minimums bei $r = m = n-1$, von (80) auch bei $m = n$, erwiesen. Wir sind nunmehr im stande, die Notwendigkeit der letzten Bedingung (80) auch unter der allgemeineren Annahme $r \geqq n-1$, $m \geqq n$ darzuthun, während $r < n-1$ durch den Satz IV ausgeschlossen ist. Wäre nämlich auf einer Curve a, welche nicht zu den singulären im Sinne von S. 85 gehört, an irgend einer Stelle t des Intervalls $t_1 \leqq t \leqq t_2$ $F_1(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}) < 0$, so bestände diese Ungleichheit wegen der Stetigkeit von F_1 auch für ein ganzes

Intervall $t' \leq t \leq t''$. Hier könnte aber $t'' - t'$ so klein und eine neue Stelle $t_0 < t'$ so nahe an t' angenommen werden, dass nicht nur beständig $\pm \Theta(t', t) > 0$, sondern auch $\pm \Theta(t_0, t) > \zeta > 0$ wäre für das ganze Teil-Intervall $t' \leq t \leq t''$. Ferner könnte man eine

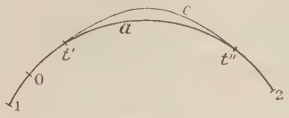

Fig. 7.

Curve c bestimmen, welche a in den Punkten t' und t'' von der Ordnung $r \geq n - 1$ berührt, bis zu den Ableitungen $r$ter Ordnung stetig ist und einer beliebig engen Nachbarschaft $m$ter Ordnung (37) von a angehört. Nun könnten in (37) die Grössen g_μ $(\mu = 0, 1, \ldots n)$ so klein gewählt werden, dass auch (vergl. die Bemerkungen bei (121)) $E(\lambda) < 0$ wäre in der ganzen Ausdehnung von c und daher nach (105a) $\bar{J} - J < 0$, wenn unter J das über a erstreckte Integral verstanden wird, unter $\bar{J}$ aber dasselbe Integral, in welchem nur der zwischen t' und t'' liegende Teil von a durch c ersetzt ist. Somit würde a die Eigenschaft des Minimums nicht besitzen, da die betrachtete Variation jedenfalls zu den „erlaubten" zu zählen ist.

In Bezug auf die „conjugierten Punkte", deren Vorhandensein für VIII ausgeschlossen wurde, ist es mir allerdings noch nicht gelungen, mittelst der hier überall angewandten „Methode der benachbarten Lösungen" zu sicheren Kriterien zu gelangen, wann sie mit dem Bestehen eines Minimums vereinbar sind, und ich muss hierüber auf die in der Einleitung erwähnte Arbeit von Scheeffer (Math. Ann. XXV) verweisen; doch mögen hier noch die folgenden Bemerkungen Platz finden.

In der Nähe eines zu 0 auf a conjugierten Punktes 3, für welchen $\Theta(t_0, t_3; a) = 0$ ist, existiert unter gewissen, sehr allgemeinen Bedingungen eine Curve $a = g\,(x = \bar{\varphi}(\lambda),\ y = \bar{\psi}(\lambda))$, welche alle Curven u, darunter a, einer Schar U von der definierten Eigenschaft der Reihe nach von $n$ter, statt nur von $n-1$ter Ordnung berührt, ohne selbst mit einer Curve u zusammenzufallen, und die als „Enveloppe" der Schar U bezeichnet werden möge in einem von dem gewöhnlichen etwas abweichenden Sinne

des Wortes. Auf dieser „Enveloppe“ muss einerseits, unseren Betrachtungen von (124a) zufolge, beständig $\Theta(t_0', t_3'; u) = 0$ sein, d. h. sie enthält die zu 0 conjugierten Punkte 3′ aller u, andererseits aber ist nach (122) hier beständig $k - k = 0$ und daher $E(\lambda) = 0$.

Nimmt man also $t_1 \leqq t_0 < t_3 \leqq t_2$ an und betrachtet die erlaubte Variation 0 4 3 von 0 3 oder 1 0 4 3 2 von 1 2, wo 4 einen Punkt von g und 0 4 die zu 4 gehörige Curve u bedeutet, so ist nach (105)

$$J_{043} - J_{03} = \int_{\lambda_4}^{\lambda_3} E(\lambda)\, d\lambda = 0$$

und daher $$J_{10432} = J_{12},$$

während 4 immer so nahe an 3 angenommen werden kann, dass 0 4 3 einer beliebig engen Nachbarschaft $n-1$ter, ja, weil die Berührung in 3 von $n$ter Ordnung ist, auch von $n$ter Ordnung angehört. Da aber g der Differentialgleichung des Problems (von

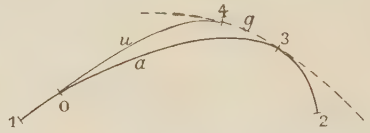

Fig. 8.

der Ordnung $2n$) im allgemeinen nicht genügt, so kann immer J_{43} und damit auch $J_{10432} = J_{12}$ nach II durch beliebig kleine Variationen noch verkleinert werden, so dass für a ein Minimum sicher nicht besteht.

Dieses Ergebnis ist im wesentlichen die Verallgemeinerung einer zuerst von Herrn Lindelöf (Moigno et Lindelöf, Leçons de Calcul Différentiel et Intégral; IV Calcul des Variations) entdeckten Eigenschaft der Kettenlinie in Bezug auf den Inhalt der Rotationsfläche $\int y\, ds$, bei welcher zwei auf der Rotationsachse sich schneidende Tangenten die Rolle der „Enveloppe“ spielen. Dagegen fehlt mir noch ein einfaches Kriterium für die Existenz einer solchen allgemeineren „Enveloppe“ von den vorausgesetzten Eigenschaften.

Die in der vorliegenden Arbeit abgeleiteten Sätze, namentlich II, V, VI und VIII, gestatten jetzt eine vollständige Entscheidung über das Vorhandensein eines Minimums in dem betrachteten Sinne und damit die Lösung der gestellten Aufgabe mit alleiniger Ausnahme der folgenden Fälle:

1. wenn $m < n-1$ sein soll, d. h. wenn ein Minimum in einer „Nachbarschaft“ von niedrigerer als der $n-1$ten Ordnung verlangt wird,

2. wenn $m = n-1$ und gleichzeitig $r > n-1$ sein soll (cf. V),

3. wenn auf a die Functionen P, Q in ganzen Intervallen unstetig sind (cf. II),

4. wenn a gemäss IV aus einer Anzahl verschiedener particulärer Lösungen der Differentialgleichung zusammengesetzt ist,

5. wenn a nicht sämmtlichen in VIII vorausgesetzten Stetigkeitsbedingungen, sondern nur den durch (32) bis (35) ausgedrückten genügt, d. h. wenn die $\varphi_\nu^{(\mu)}(t)$ nicht alle stetig sind oder wenn a sich zwischen 1 und 2 irgendwo selbst durchschneidet,

6. wenn a schon im betrachteten Intervall den zum Anfangspunkt „conjugierten“ Punkt t_1' enthält: $\Theta(t_1, t_1'; a) = 0$, ohne dass dort eine stetige „Enveloppe“ g existiert,

7. wenn F_1 oder E_1 an einzelnen Stellen von a verschwindet, in deren Umgebung die Function negativ werden kann (cf. V, VI und VIII), sonst aber auf a immer positiv ist.

Nur in einem dieser Ausnahmefälle würde die Entscheidung unter Umständen erst von einer Special-Untersuchung abhängig zu machen sein.

Zum Schlusse ist es mir Bedürfnis, Herrn Prof. H. A. Schwarz, dem ich die erste Anregung zu meiner Arbeit und vielfache Unterstützung durch warmes Interesse und gütige Ratschläge verdanke, meinen ergebensten Dank an dieser Stelle auszusprechen.

Thesen.

I.

In der Variations-Rechnung ist auf eine genaue Definition des Maximums oder Minimums grösserer Wert als bisher zu legen.

II.

Mit Unrecht wird der Physik die Aufgabe gestellt, alle Naturerscheinungen auf Mechanik der Atome zurückzuführen.

III.

Die Messung ist aufzufassen als das überall anwendbare Hilfsmittel, stetig veränderliche Qualitäten zu unterscheiden und zu vergleichen.

Vita.

Natus sum Ernestus Zermelo Berolini a. d. VI Kal. Aug. anni MDCCCLXXI patre Theodoro, matre Augusta e gente Zieger, quos morte praematura mihi ereptos valde lugeo. Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum elementis imbutus postquam per novem annos gymnasium, quod dicitur „Luisenstädtisches", Berolini frequentavi, maturitatis ibi testimonium vere anni h. s. LXXXIX adeptus sum. Tum in philosophorum ordinem receptus per quinque annos et sex menses studiis praecipue mathematicis, physicis, philosophicis operam dedi, primum Berolini, deinde sex menses Halis Saxonum, tum sex menses Friburgi Brisgaviae, postremo iterum Berolini. Audivi viros doctissimos:

Aron, Dilthey, Ebbinghaus, Förster, Frobenius, Fuchs, Glan, Hettner, Knoblauch, E. Kötter, Kundt (†), Lehmann-Filhés, Paulsen, Planck, de Richthofen, Schlesinger, E. Schmidt, Schwarz, Wien (Berolini), Cantor, Erdmann, Haym, Husserl, Ule, Wangerin (Halis), Lüroth, Münsterberg, Riehl, Stichelberger, Warburg, Weissenfels (Friburgi). Berolini seminarii mathematici, cui praesunt Fuchs, Schwarz, Frobenius, per duos annos et sex menses sodalis fui, exercitationibus, quas Planck de rebus mathematicis physicis instituere solet, per quinque semestria interfui.

Omnibus viris, qui me docuerunt, imprimis Lazaro Fuchs, Hermanno Amando Schwarz, Maximiliano Planck, summas gratias ago semperque habebo, nec non viro illustrissimo Aemilio Lampe, cuius consiliis et benevolentia in studiis meis magnopere adiutus sum. Societati quoque mathematicae, cuius, quamdiu Berolini aderam, sodalis fui, multum me debere confiteor.